Electromagnétisme

E. C. G. Stueckelberg de Breidenbach

Ce cours donné en 1955 a été rédigé par
L. Berger, C. Piron et J. Rufenacht
sur la base de leurs notes personnelles.

Electromagnétisme

I

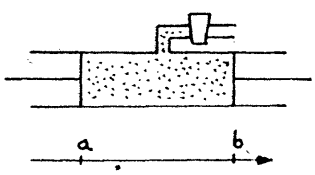
<u>Préambule :</u> Le but de la physique théorique est de donner l'impression à celui qui sait regarder autour de lui, que les phénomènes ne peuvent se passer autrement. Pour cela nous chercherons à faire découler les lois qui régissent les phénomènes, de notions simples qu'on vérifie couramment.

L'argent est une des notions les plus intuitives pour chacun de nous, c'est ce qui sert à payer celui qui exécute un travail à votre place, c'est quelque chose que l'on peut échanger contre du travail. Ceci nous montre la possibilité de comparer des travaux de natures différentes et nous amène à un principe de conservation. Aussi placerons nous, le premier principe de thermodynamique à la base de cette théorie. Nous l'écrirons sous la forme :

$$\delta U = \delta A = K_i \delta s^i \quad {}^{\times}$$

δU sera la variation de l'énergie U, δA le travail fourni au système et du aux variations δs^i des grandeurs géométriques. Par définition nous appellerons force le coefficient K_i de δs^i dans δA.

Empruntons un exemple à la mécanique. Considérons, comme sur la figure, un cylindre contenant un fluide enfermé entre deux pistons. D. point de vue mathématique, c'est un système unidimensionnel ; choisissons un axe des x et soit $m(x)$ la densité linéaire de ce fluide, a, b les positions des pistons, U sera une fonctionnelle de $m(x)$, a, b soit $U[a, b, m(x)]$



Changeons la position des pistons

$a \to a + \delta a$; $b \to b + \delta b$; $m(x) \to m(x) + \delta m(x)$

Le premier principe s'écrit :

$$\delta U = U[a + \delta a, b + \delta b, m(x) + \delta m(x)] - U[a, b, m(x)] = \delta A = K_a \delta a + K_b \delta b$$

On suppose qu'il existe une densité d'énergie $u(x)$ qui dépend de x par l'intermédiaire de $m(x)$, ce qui suppose l'espace homogène. Nous écrirons :

$$\delta \int_a^b u(x)\, dx = \delta b . u(b) - \delta a . u(a) + \int_a^b \delta u(x)\, dx$$

$^{\times}$ sommation Einsteinienne

Nous poserons que la masse totale $M = \int_a^b m(x)\,dx$ ne varie pas, c'est à dire que notre robinet est fermé ; ainsi :

$$\underline{\delta} \int_a^b m(x)\,dx = \delta b \cdot m(b) - \delta a \cdot m(a) + \int_a^b \delta m(x)\,dx = 0$$

c'est la contrainte de notre problème de variation. Employons la méthode des facteurs de Lagrange, posons : $\psi = U + \lambda \left(\int_a^b m(x)\,dx - M \right)$; on a :

$$\underline{\delta}\,\psi = \delta\lambda \left(\int_a^b m(x)\,dx - M \right) + \delta b \left(u(b) + \lambda m(b) \right) - \delta a \left(u(a) + \lambda m(a) \right)$$

$$+ \int_a^b dx \left(\delta u(x) + \lambda\, \delta m(x) \right) \quad = K_a\, \delta a + K_b\, \delta b$$

or , on peut écrire :

$$\int_a^b dx \left(\delta u(x) + \lambda\, \delta m(x) \right) = \int_a^b dx \left(d_m u(x) + \lambda \right) \delta m(x)$$

d'où en égalant membre à membre les coefficients des variations, on trouve :

$\delta\lambda \qquad \int_a^b m(x)\,dx - M = 0$ c'est la contrainte

$\delta b \qquad u(b) + \lambda m(b) = K_b \quad , \quad \delta a \qquad u(a) + \lambda m(a) = -K_a$

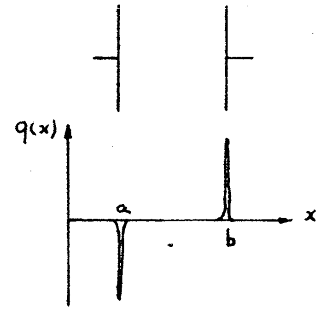
$\delta m(x) \qquad d_m u(x) + \lambda = 0$

Introduisons une orientation $V(a) = -1$, $V(b) = 1$; posons :

$$u(x) + \lambda m(x) = u(x) - d_m u(x) m(x) = \tau(x) = -p(x)$$

il vient : $-p(a) = V(a)\, K_a$, $-p(b) = V(b)\, K_b$, nous sommes ainsi amenés à définir une pression $p(x)$ en chaque point du fluide, or $-d_x\, p(x) = d_m u \cdot d_x m + \lambda\, d_x m = 0$ ce qui montre que la pression est constante dans le fluide.

De même en électrostatique, un condensateur plan à armatures infinies est un système unidimentionnel.



Ce qui correspond à $m(x)$ est ici $D(x)$ le déplacement électrique. Nous ferons les mêmes hypothèses sur l'énergie et nous poserons :

$$U = \int u(D(x))\,dx$$

Nous imposerons : $\partial_x D(x) = q(x)$ où $q(x) = Q_a \delta(x-a) + Q_b \delta(x-b)$ est la charge électrique et $\delta(y)$ la mesure de Dirac définie par

$$\int f(x)\,\delta(x)\,dx \equiv f(0)$$

On a ainsi une infinité de contraintes et la méthode des facteurs de Lagrange s'écrit :

$$\psi = \int dx \Big[u(D(x)) - \phi(x)\big(\partial_x D(x) - q(x) \big) \Big]$$

$$\delta\psi = \int dx \Big[\partial_D u(D(x)) . \delta D(x) - \delta\phi(x) \big(\partial_x D(x) - q(x) \big) - \phi(x) \big(\partial_x \delta D(x) - \delta q(x) \big) \Big]$$

$\delta q(x)$ est obtenu en déplaçant les charges situées au voisinage de a d'une quantité δa, et les charges situées au voisinage de b d'une quantité δb, ce qui donne : $\delta q(x) = - Q_a \partial_x \delta(x-a) . \delta a - Q_b \partial_x \delta(x-b) . \delta b$

Le premier principe s'écrit :

$$\delta\psi = \int dx \Big[\partial_D u . \delta D(x) - \delta\phi(x) \big(\partial_x D(x) - q(x) \big) - \phi(x) \big(\partial_x \delta D(x) + Q_a \partial_x \delta(x-a) . \delta a + Q_b \partial_x \delta(x-b) \delta b \big) \Big]$$

$$= K_a \delta a + K_b \delta b$$

$\delta D(x)$ étant supposé nul à l'infini *, en intégrant par partie on peut écrire :

$$- \int dx\, \phi(x) \big(\partial_x \delta D(x) + Q_a \partial_x \delta(x-a) . \delta a + Q_b \partial_x \delta(x-b) . \delta b \big)$$

$$= \int dx\, \partial_x \phi(x) \big(\delta D(x) + Q_a \delta(x-a) . \delta a + Q_b \delta(x-b) . \delta b \big)$$

$$= \int dx\, \partial_x \phi(x)\, \delta D(x) + \partial_x \phi(a)\, Q_a \delta a + \partial_x \phi(b)\, Q_b \delta b$$

d'où en égalant membre à membre les coefficients des variations, on trouve :

$\delta\phi(x)$	$\partial_x D(x) = q(x)$	les contraintes
$\delta D(x)$	$\partial_D u = - \partial_x \phi(x)$	
δa	$K_a = \partial_x \phi(a)\, Q_a$, δb $K_b = \partial_x \phi(b)\, Q_b$	

* Physiquement on doit supposer $u(D(x))$ nul à l'infini et même $D(x)$ nul à l'infini ou encore $Q_a = - Q_b$ car en cherchant la primitive de $q(x)$ on trouve :

$$D(x) = \begin{cases} ct & \text{pour } x < a \\ Q_a + ct & \text{pour } a < x < b \\ Q_a + Q_b + ct & \text{pour } x > b \end{cases}$$

$\partial_D u(x)$ sera par définition le champ électrique $E(x)$ et $\phi(x)$ sera le potentiel scalaire. On trouve alors les formules classiques:

$$E(x) = -\partial_x \phi(x) \qquad \partial_x D(x) = q(x) \qquad K = -EQ \;^{x}$$

Généralisons: considérons une distribution de charges quelconque mais nulle avant l'infini. Déplaçons ces charges d'une quantité infinitésimale $\delta s(x)$, ce qui revient à déplacer les x de $-\delta s(x)$, c'est à dire à faire la transformation: $y = x - \delta s(x)$. Nous pouvons écrire:

$$\int dy\; q(y) = \int dx \left(1 - \partial_x \delta s(x)\right).\, q\left(x - \delta s(x)\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\delta q(x) &= \left(1 - \partial_x \delta s(x)\right).\, q\left(x - \delta s(x)\right) \quad - q(x) \\
&= \left(1 - \partial_x \delta s(x)\right).\left(q(x) - \delta s(x).\, \partial_x q(x)\right) \quad - q(x) \\
&= - \partial_x \left(q(x).\, \delta s(x)\right)
\end{aligned}$$

Et le 1ier principe s'écrit :

$$\begin{aligned}
\underline{\delta} \psi &= \int dx \Big[\partial_D u(D(x)).\, \delta D(x) \;-\; \delta\phi(x)\left(\partial_x D(x) - q(x)\right) \\
&\qquad\qquad - \phi(x)\Big(\partial_x \delta D(x) + \partial_x\left(q(x).\, \delta s(x)\right)\Big)\Big] \\
&= \int dx \Big[\partial_D u(D(x)).\, \delta D(x) \;-\; \delta\phi(x)\left(\partial_x D(x) - q(x)\right) \\
&\qquad\qquad + \partial_x \phi(x)\left(\delta D(x) + q(x).\, \delta s(x)\right)\Big] \\
&= \int d\, K(x).\, \delta s(x) \qquad \text{d'où les équations :}
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned}
\partial_D u(D) &= E(x) = -\partial_x \phi(x) \\
\partial_x D(x) &= q(x) \\
dK(x) &= \partial_x \phi(x).\, q(x).\, d(x) = -E(x)\, q(x)\, dx
\end{aligned}\right.$$

---

x Ici la force K est celle qui tient en équilibre la charge Q dans le champ E d'où le signe $-$.

II

ELECTROSTATIQUE

1) Rappel d'Analyse Vectorielle :

Au 1ier chapitre dans le cas unidimensionnel nous avions :

$$\int_a^b dx\, q(x) = D(b) - D(a) = Q_{ab}$$

Généralisons : considérons une surface fermée C orientée vers l'extérieur et posons :

$$Q_V = \oint_C (d\vec{\sigma}; \vec{D})$$

$d\vec{\sigma}$ est l'élément de surface, $\vec{D}$ le déplacement électrique, Q_V la charge contenue dans l'intérieur V de la surface C.

Nous définirons une densité de charge soit :

$$q(\vec{x}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_C (d\vec{\sigma}; \vec{D})$$

le point $\vec{x}$ restant à l'intérieur de C. On sait que c'est ainsi que l'on peut définir la divergence, aussi écrirons nous :

$$q(\vec{x}) = \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x})$$

Le théorème de Gauss est alors évident :

$$Q_V = \oint_C (d\vec{\sigma}; \vec{D}) = \int_V dV \cdot \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) = \int_V dV \cdot q(\vec{x})$$

De même on peut définir le gradient d'un scalaire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi(\vec{x}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_C d\vec{\sigma} \cdot \varphi$$

Le point $\vec{x}$ restant à l'intérieur de C

On a le théorème :

$$\oint_C d\vec{\sigma}\, \varphi(\vec{x}) = \int_V dv\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi(\vec{x})$$

Remarque : on a : $\operatorname{div}(\varphi \vec{a}) = (\vec{a}; \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi) + \varphi \operatorname{div} \vec{a}$

2) Le théorème d'énergie :

Faisant les mêmes hypothèses que précédemment, nous poserons :

$$U[\vec{D}] = \int dV \cdot u(\vec{D}(\vec{x}))$$

$\vec{D}(\vec{x})$ le déplacement électrique satisfaira aux équations :

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) = c_e \, q(\vec{x})$$

où $q(\vec{x})$ est la densité de charges électriques et c_e une constante qui fixe les unités.

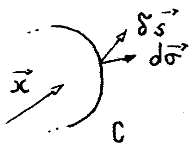
Nous définirons le champ électrique $\vec{E}(\vec{x})$ par les relations :

$$E^i(\vec{D}(\vec{x})) = c_e \, \partial_{D^i} u(\vec{D}(\vec{x}))$$

Déplaçons de $\delta\vec{s}(\vec{x})$ les charges situées en $\vec{x}$; nous avons :

$$\delta q(\vec{x}) = - \lim_{V \to 0} \cdot \frac{1}{V} \oint_C (d\vec{\sigma} ; \delta\vec{s} \cdot q) = - \operatorname{div}(q(\vec{x}) \cdot \delta\vec{s}(\vec{x}))$$

C étant une petite surface fermée entourant le point $\vec{x}$. Car en effet :



$\oint_C (d\vec{\sigma} ; d\vec{s} \cdot q)$ représente la charge que nous avons retirée de l'intérieur de C.

Si $\phi(\vec{x})$ joue le rôle de facteur de Lagrange, le premier principe s'écrit :

$$\underline{\delta} \left(\int dV \cdot u(\vec{D}(\vec{x})) - \int dV \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{c_e} \cdot \operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) - q(\vec{x}) \right) \right) = \int (d^3\vec{K}(\vec{x}) ; \delta\vec{s}(\vec{x}))$$

Développons les calculs, il vient

$$\int dV \left[\frac{1}{c_e} (\vec{E} ; \delta\vec{D}) - \delta\phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{c_e} \operatorname{div} \vec{D} - q \right) \right.$$
$$\left. - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{c_e} \operatorname{div} \delta\vec{D} + \operatorname{div}(q \cdot \delta\vec{s}) \right) \right]$$
$$= \int (d^3\vec{K} ; \delta\vec{s})$$

mais en remarquant que :

$$\int_V dV \, \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \int_V dV (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi ; \vec{a}) = \oint_C (d\vec{\sigma} ; \vec{a} \varphi)$$

Nous pouvons intégrer par parties en supposant nulles les contributions à l'infini : ˣ

$$\int dV \left[\frac{1}{c_e} (\vec{E} ; \delta\vec{D}) - \delta\phi \left(\frac{1}{c_e} \operatorname{div} \vec{D} - q \right) + \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi \; ; \frac{1}{c_e} \delta\vec{D} + q.\delta\vec{s} \right) \right]$$

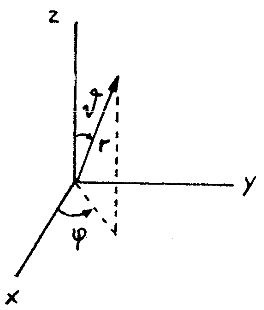
$$= \int (d^3\vec{K} \; ; \delta\vec{s})$$

d'où en égalant membre à membre les coefficients des variations, nous trouvons :

$$\left[\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi \\ \operatorname{div} \vec{D} &= c_e\, q \\ d^3\vec{K} &= \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi \,.\, q\, dV = -\vec{E} \,.\, q\, dV \end{aligned} \right.$$

3) Calcul de $\vec{D}$ dans le cas d'une distribution de charge à symétrie sphérique

Prenons un système de coordonnées sphériques r, ϑ, φ. En chaque point de l'espace il existe un repère cartésien défini par les vecteurs $[\vec{r}], [\vec{\vartheta}], [\vec{\varphi}]$ et en ce point le vecteur $d\vec{s}$ s'écrit :



$$d\vec{s} = dr[\vec{r}] + r d\vartheta [\vec{\vartheta}] + r \sin\vartheta\, d\varphi\, [\vec{\varphi}]$$

et ainsi :

$$d\vec{s}^{\,2} = (dr)^2 + (r d\vartheta)^2 + (r \sin\vartheta\, d\varphi)^2$$

et le volume élémentaire sera :

$$dV = (dr).(r d\vartheta).(r \sin\vartheta\, d\varphi) = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

En raison de la symétrie sphérique :

$$q(\vec{x}) = q(r) \quad \text{et} \quad \vec{D}(\vec{x}) = D(r)\,[\vec{r}].$$

ˣ Les contributions à l'infini dues à $q\delta\vec{s}$ sont nulles car il n'y a pas de charges à l'infini. Il faut donc supposer que $\phi\,\delta\vec{D}$ s'annule à l'infini au moins comme $\frac{1}{r^2}$.

d'où l'équation :

$$\oint_{r=ct} (d\vec{\sigma};\vec{D}) = \int_V dV\cdot \operatorname{div}\vec{D} = c_e \int_V dV\, q$$

devient

$$4\pi r^2 D(r) = c_e \int_V q(r)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi c_e \int_0^r q(\rho)\cdot \rho^2\, d\rho$$

d'où la solution:

$$\vec{D}(\vec{x}) = \vec{D}(r)[\vec{r}] = c_e \frac{[\vec{r}]}{r^2} \int_0^r q(\rho)\, \rho^2\, d\rho$$

cas particulier:

$$q(r) = \begin{cases} q_0 & \text{si} \quad 0 \leq r < R \\ 0 & \text{si} \quad R \leq r \end{cases}$$

pour $r < R$

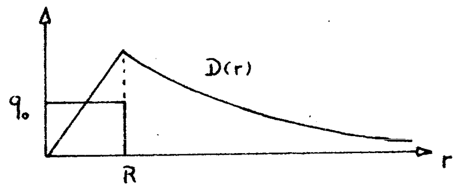
$$D(r) = \frac{c_e}{r^2} \int_0^r q_0\, \rho^2\, d\rho = \frac{c_e}{3} q_0\, r$$

pour $r \geqslant R$

$$D(r) = \frac{c_e}{r^2} \int_0^R q_0\, \rho^2\, d\rho = \frac{c_e}{3} R^3 q_0 \frac{1}{r^2} = c_e \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}$$

où

$$Q = 4\pi \int_0^R q_0\, \rho^2\, d\rho \qquad \text{est la charge totale}$$



4) Théorie des conducteurs :

Soient n conducteurs et soit S_a la surface du $a^{ième}$ conducteur. Nous ferons les hypothèses suivantes :

a) A l'intérieur des conducteurs la densité d'énergie u est nulle

b) Le $a^{ième}$ conducteur porte une charge Q_a qui est définie par l'équation :

$$\int_{S_a} (d\vec{\sigma} ; \vec{D}) \quad + c_e Q_a = 0$$

La normale à S_a étant orientée vers l'intérieur du conducteur car on se propose d'appliquer les formules de Gauss pour l'extérieur des conducteurs.

c) Il existe à l'extérieur des conducteurs une densité de charge q définie par l'équation :

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = c_e q$$

Nous définirons le champ électrique $\vec{E}$ comme précédemment :

$$E_i = c_e \, \partial_{D^i} \, U(\vec{D})$$

Nous supposerons l'espace extérieur aux conducteurs entièrement limité par des conducteurs.

Appliquons le premier principe de thermodynamique en variant la surface des conducteurs et en déplaçant les charges. La variation de la densité de charges sera :

$$\delta q = - \lim \frac{1}{V} \int_C (d\vec{\sigma} ; \delta\vec{s}) \, q \quad = - \mathrm{div}(q \, \delta\vec{s})$$

Le travail δA sera donné par :

$$\delta A = \int (d^3\vec{K} ; \delta\vec{s}) \; + \sum_a \oint_{S_a} (d^2\vec{K} ; \delta\vec{s})$$

On a donc :

$$\int (d^3\vec{K} ; \delta\vec{s}) + \sum_a \oint_{S_a} (d^2\vec{K} ; \delta\vec{s}) =$$

$$\underline{\delta}\left(\int dV\left[u(\vec{D}(\vec{x})) - \phi(\vec{x})\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right)\right] + \sum_a \phi_a\left(\frac{1}{c_e}\oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\vec{D}) + Q_a\right)\right)$$

où $\phi(\vec{x})$ et ϕ_a sont les facteurs de Lagrange

On a d'une part : $$\underline{\delta}\int dV\left(u(\vec{D}(\vec{x})) - \phi(\vec{x})\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right)\right) =$$

$$\sum_a \oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\delta\vec{s})\left(u - \phi\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right)\right)$$

$$+\int dV\left[\frac{1}{c_e}(\vec{E};\delta\vec{D}) - \delta\phi\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right) - \phi\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\delta\vec{D} + \operatorname{div}(q\delta\vec{s})\right)\right]$$

$$= \sum_a \oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\delta\vec{s})\left(u - \phi\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right)\right)$$

$$+\int dV\left(\frac{1}{c_e}(\vec{E};\delta\vec{D}) - \delta\phi\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right) + \left(q\overrightarrow{\operatorname{grad}}\phi;\frac{1}{c_e}\delta\vec{D} + q\delta\vec{s}\right)\right)$$

$$-\sum_a \oint_{S_a}\left(d\vec{\sigma};\phi\left(\frac{1}{c_e}\delta\vec{D} + q\delta\vec{s}\right)\right)$$

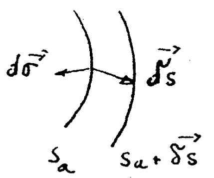
et d'autre part :

$$\underline{\delta}\,\phi_a\left(\frac{1}{c_e}\oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\vec{D}) + Q_a\right) =$$

$$\delta\phi_a\left(\frac{1}{c_e}\oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\vec{D}) + Q_a\right) + \phi_a\frac{1}{c_e}\oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\delta\vec{D}) + \phi_a\frac{1}{c_e}\oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\delta\vec{s})\operatorname{div}\vec{D}$$

Le dernier terme provient de la variation de la surface du conducteur :

$$\oint_{S_a+\delta\vec{s}}(d\vec{\sigma};\vec{D}) - \oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\vec{D}) = \int_{S_a}(d\vec{\sigma};\delta\vec{s})\operatorname{div}\vec{D}$$



On a appliqué le théorème de Gauss au volume compris entre les deux surfaces S_a et $S_a+\delta\vec{s}$

et il vient :

$$\int(d^3\vec{K};\delta\vec{s}) + \sum_a\oint_{S_a}(d^2\vec{K};\delta\vec{s}) = \sum_a\oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\delta\vec{s})\left(u - \phi\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right)\right)$$

$$+\int dV\left(\frac{1}{c_e}(\vec{E};\delta\vec{D}) - \delta\phi\left(\frac{1}{c_e}\operatorname{div}\vec{D} - q\right) + \left(q\overrightarrow{\operatorname{grad}}\phi;\frac{1}{c_e}\delta\vec{D} + q\delta\vec{s}\right)\right)$$

$$-\sum_a\oint_{S_a}\left(d\vec{\sigma};\phi\left(\frac{1}{c_e}\delta\vec{D} + q\delta\vec{s}\right)\right) + \sum_a\delta\phi_a\left(\frac{1}{c_e}\oint_{S_a}(d\vec{\sigma};\vec{D}) + Q_a\right) +$$

$$+ \sum_a \phi_a \frac{1}{Ce} \oint_{S_a} (d\vec{\sigma}\,;\delta\vec{D}) \quad + \sum_a \phi_a \frac{1}{Ce} \oint_{S_a} (d\vec{\sigma}\,;\delta\vec{s}\,)\ \mathrm{div}\,\vec{D}$$

En égalant membre à membre les coefficients de $\delta\vec{D}$ sur les conducteurs, on trouve : $\phi = \phi_a$ ce qui montre que le potentiel scalaire ϕ est constant sur S_a.

On peut simplifier l'équation, car on a alors:

$$- \sum_a \oint_{S_a} (d\vec{\sigma}\,; \phi q\, \delta\vec{s}\,) + \sum_a \phi_a \frac{1}{Ce} \oint_{S_a} (d\vec{\sigma}\,;\delta\vec{s}\,)\ \mathrm{div}\,\vec{D} = 0$$

On en déduit alors en égalant membre à membre les coefficients des autres variations :

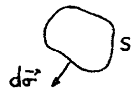
$$\left[\begin{array}{l}
\frac{1}{Ce} \oint (d\vec{\sigma}\,;\vec{D}) + Q_a = 0 \\[2ex]
\frac{1}{Ce}\ \mathrm{div}\,\vec{D} - q = 0 \\[1ex]
\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \qquad \text{et} \quad \phi = \phi_a \\[1ex]
d^3\vec{K} = q\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi\ dv = -\vec{E}\,q\,dv \\[1ex]
d^2\vec{K} = u\ d\vec{\sigma}
\end{array}\right.$$

<u>Remarque:</u> ϕ étant constant sur la surface d'un conducteur, on en déduit que $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface de ce conducteur. D'autre part la densité d'énergie u étant positive, la force qui tient en équilibre un élément de surface d'un conducteur est perpendiculaire à cette surface et dirigée vers l'intérieur. Par exemple dans le cas d'un condensateur plan, u n'est pratiquement différent de zéro qu'entre les armatures, d'où on en déduit que les armatures s'attirent.

5) Tensions de Maxwell :

La force $\vec{K}_e$ exercée sur un conducteur par le champ électrostatique vaut :

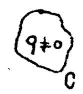
$$\vec{K}_e = \oint_S d\vec{\sigma}\, u$$



où $d\vec{\sigma}$ est orienté vers l'extérieur du conducteur.

Cherchons une formule analogue dans le cas de charges d'espace, c'est à dire de la forme :

$$K^i = \oint_C (d\vec{\sigma} ; \vec{T}^i)$$



Vu le terme $\vec{T}^i$ une telle formule ne sera valable qu'en coordonnées cartésiennes. Et encore faut-il que :

$$\oint_C (d\vec{\sigma} ; \vec{T}^i) = \int_V dv\, q E^i$$

où V est le volume intérieur à la surface fermée C. De cette égalité on déduit :

$$\operatorname{div} \vec{T}^i = q E^i \qquad \text{ou encore}$$

$$\partial_k T^{ki} = q E^i \qquad {}^{xx}$$

Or nous affirmons que l'expression

$$T^{ki} = \frac{1}{C_e} D^k E^i - g^{ki}\, \ell(\vec{E}) \qquad {}^{x}$$

où $\ell(\vec{E})$, la lagrangienne, est telle que

$$\delta \ell(\vec{E}) = \frac{1}{C_e} (\vec{D} ; \delta \vec{E})$$

est une solution du problème que nous cherchons.

Démonstration : On a :

$$\partial_k T^{ki} = \frac{1}{C_e} \left(\partial_k D^k E^i + D^k \partial_k E^i - D_k \partial_i E^k \right)$$

---

xx Sommation Einsteinienne

x Ici $g^{ik} = 1$ si $i = k$ et 0 si $i \neq k$.

or :

$$\partial_i E^k = -\partial_i \partial_k \phi = \partial_k E^i \qquad \text{d'où}$$

$$\partial_k \mathcal{T}^{ki} = \frac{1}{C_e} \partial_k D^k E^i = q\, E^i \qquad \text{c.q.f.d.}$$

$\mathcal{T}^{ki}$ est appelée la tension de Maxwell. Cherchons à appliquer cette expression au cas d'un conducteur ; on doit avoir :

$$d^2K^i = d\sigma^i u(\vec{D}) = d\sigma_k \left(\frac{1}{C_e} D^k E^i - g^{ki} \ell(\vec{E}) \right)$$

$$= \frac{1}{C_e} (d\vec{\sigma} ; \vec{D}) E^i - d\sigma^i \ell(E)$$

Mais nous savons que le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface du conducteur c'est à dire que $d\vec{\sigma} \parallel \vec{E}$ ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{C_e} (d\vec{\sigma} ; \vec{D}) E^i = \frac{1}{C_e} (\vec{E} ; \vec{D}) d\sigma^i$$

d'où on tire la condition :

$$\Big[\ u(\vec{D}) = \frac{1}{C_e} (\vec{E} ; \vec{D}) - \ell(\vec{E})$$

relation compatible avec les précédentes, car en effet, on a bien :

$$\delta u(\vec{D}) = \frac{1}{C_e} (\vec{E} ; \delta\vec{D}) + \frac{1}{C_e} (\delta\vec{E} ; \vec{D}) - \frac{1}{C_e} (\vec{D} ; \delta\vec{E}) = \frac{1}{C_e} (\vec{E} ; \delta\vec{D})$$

6) Electrostatique isotrope et linéaire :

Jusqu'à maintenant nous n'avons pas explicité la forme de la densité d'énergie $u(\vec{D})$. On supposera tout d'abord que u ne dépend que de l'intensité du déplacement électrique c'est à dire que $u = u(\vec{D}^2)$, on en déduit $\vec{E} = 2 C_e u' \vec{D}$. [x]

---

[x] Et de plus $\mathcal{T}^{ik} = \mathcal{T}^{ki}$. Dans le cas anisotrope $\mathcal{T}^{ki} - \mathcal{T}^{ik} = \frac{1}{C_e}(D^k E^i - D^i E^k)$ est une densité de couple qui ne dépend pas de l'origine des coordonnées. Voir : E. Durand : Electrostatique et Magnétostatique, Masson édt, p 200 et O. Costa de Beauregard : Th. de la Relativité Restreinte, Masson édt, p 82

Ainsi dans ce cas $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{D}$. Si de plus on suppose ces relations linéaires on est conduit à poser : x

$$u = \frac{1}{2\varepsilon C_e} \vec{D}^2 \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{D}$$

ε est appelée la constante diélectrique. Ce que l'on écrit d'habitude sous la forme :

$$u = \frac{1}{2C_e} (\vec{E};\vec{D}) \qquad \text{et} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

cherchons alors la forme de la Lagrangienne il vient :

$$\ell(\vec{E}) = \frac{1}{C_e}(\vec{E};\vec{D}) - u(\vec{D}) = \frac{1}{2C_e}(\vec{E};\vec{D}) = \frac{\varepsilon}{2C_e}\vec{E}^2$$

ainsi on a numériquement $u = \ell$

7) Force sur un diélectrique solide.

Tout au début de ce chapitre on a supposé l'espace homogène : u ne dépendait de $\vec{x}$ que par l'intermédiaire de $\vec{D}$. Dans ce paragraphe nous supposerons que la constante diélectrique dépend de $\vec{x}$. Nous nous placerons dans le cas d'un diélectrique solide et nous ferons varier ε en déplaçant ce diélectrique :

$$\delta\varepsilon = \varepsilon(\vec{x} - \delta\vec{s}) - \varepsilon(\vec{x}) = -(\overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon ; \delta\vec{s})$$

Le travail fourni au système sera : xx

$$\delta A = \int (d^3\vec{K} ; \delta\vec{s}) = \int dv \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2 C_e}\vec{D}^2\,\delta\varepsilon\right)$$

$$= \int dv \frac{1}{2\varepsilon^2 C_e}\vec{D}^2(\overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon ; \delta\vec{s})$$

d'où

$$\overrightarrow{d^3K} = \frac{1}{2\varepsilon^2 C_e}\vec{D}^2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon \, dv \qquad \text{ou encore}$$

$$\left[\ \overrightarrow{d^3K} = \frac{1}{2C_e}\vec{E}^2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon \, dv\right.$$

---

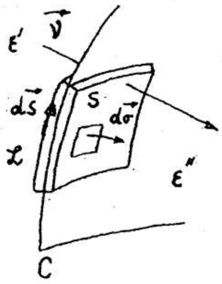
x ε ne peut être négatif car alors la densité d'énergie u serait négative.

xx On devrait faire le même calcul qu'au paragraphe 2) avec en plus les termes que nous avons écrit ici ; et on trouverait :

$$\overrightarrow{d^3K} = -\vec{E}q\,dv + \frac{1}{2C_e}\vec{E}^2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon\,dv$$

8) Conditions aux limites entre deux diélectriques :

Soient 2 diélectriques de constantes ε' et ε'' séparés par une surface C :



Conditions sur $\vec D$: s'il n'y a pas de charge on doit avoir :

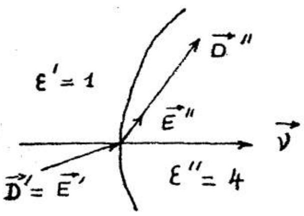
$$\oint_S (d\vec\sigma ; \vec D) = 0 \quad \text{car} \quad \operatorname{div}\vec D = c_e q$$

d'où en passant à la limite :

$$(\vec D'' ; \vec\nu) = (\vec D' ; \vec\nu)$$

condition que nous écrirons :

$$\left[\ \vec D''_\perp = \vec D'_\perp\right.$$



Conditions sur $\vec E$: on doit avoir :

$$\oint_{\mathcal{L}} (d\vec s ; \vec E) = 0 \quad \text{car} \quad \vec E = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$$

d'où la condition :

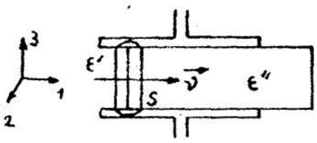
$$\left[\ \vec E''_{/\!/} = \vec E'_{/\!/}\right.$$

9) Remarque et Application :

L'expression $T^{ki} = \frac{1}{c_e} D^k E^i - g^{ki} \frac{\varepsilon}{2 c_e} \vec E^2$ que nous avons trouvée en supposant ε constant est encore valable si $\varepsilon = \varepsilon(\vec x)$ en effet :

$$\partial_k T^{ki} = \frac{1}{c_e}\partial_k D^k E^i + \frac{1}{c_e} D^k \partial_k E^i - \frac{\varepsilon}{c_e} E_j \partial_i E^j - \frac{1}{2c_e}\vec E^2 \partial_i \varepsilon = q E^i - \frac{1}{2c_e}\vec E^2 \partial_i \varepsilon$$

Considérons un condensateur plan et engageons un diélectrique entre ses armatures : Supposons q nul entre les deux plaques.



$\vec E$ // à l'axe 3 d'où $\vec E'' = \vec E'$ et il vient :

$$K^1 = \oint_S d\sigma_k\, T^{k1} = \oint_S d\sigma_k \frac{1}{c_e} D^k E^1 - \oint_S d\sigma_1 \frac{\varepsilon}{2c_e}\vec E^2$$

$$= -\frac{1}{2c_e}\vec E^2 (\varepsilon'' - \varepsilon')\sigma \quad ; \quad K^2 = K^3 = 0$$

Le diélectrique a donc tendance à s'engager d'avantage dans le condensateur.

III

Recherche de ϕ

Soit un espace borné par un conducteur et contenant d'autres conducteurs et des charges spatiales. On donne le potentiel ϕ_i sur chaque conducteur i et on suppose que l'on est dans le cas isotrope et linéaire. On demande de déterminer ϕ dans tout l'espace.

Nous avons alors les équations :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, \phi$$

$$div\, \vec{D} = c_e\, q$$

si $\vec{D} = \varepsilon\, \vec{E}$ il vient :

$$\left[\ \Delta \phi = -\frac{c_e}{\varepsilon} q \right. \qquad \text{(équation de Poisson)}$$

avec les conditions aux limites $\phi = \phi_i$ sur les conducteurs i.
Nous affirmons qu'il n'y a qu'une seule solution :
En effet soit ϕ' et ϕ'' deux solutions, si on pose $X = \phi'' - \phi'$, X est déterminé par les équations :

$$\Delta X = 0 \qquad X = 0 \quad \text{sur les conducteurs}$$

or

$$\sum_i \oint_{C_i} (d\vec{\sigma}\, ;\, X\, \overrightarrow{grad} X) = 0$$

mais on a aussi :

$$\sum_i \oint_{C_i} (d\vec{\sigma}\, ;\, X\, \overrightarrow{grad} X) = \int dV \left(X \Delta X + (\overrightarrow{grad} X)^2 \right)$$

d'où nous déduisons :

$$\int dV\, (\overrightarrow{grad}\, X)^2 = 0$$

ce qui exige que : $\overrightarrow{grad}\, X = 0$ d'où $X = ct = 0$ d'après les conditions aux limites.

c.q.f.d.

1) Problèmes particuliers :

a) De la démonstration d'unicité que nous venons de donner nous déduirons une remarque. Le champ électrique dans un espace borné entièrement par un conducteur est toujours nul si cet espace ne contient aucune charge.

b) Soit une charge ponctuelle Q, supposons $\phi = 0$ à l'infini. Nous affirmons que l'on a pour tout l'espace :

$$\left[\ \phi = \frac{C_e}{4\pi\,\epsilon} \cdot \frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|}\right.$$

Il suffit de montrer que $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(r)$ $\delta(r)$ étant la mesure associée à la distribution de Dirac : $T[\varphi] = \varphi(0)$; or $\Delta \frac{1}{r} = 0$ si $r \neq 0$ en effet $\vec{\text{grad}}\,\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ et

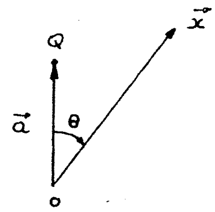
$$\text{div}\,\frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\vec{\text{grad}}\,\frac{1}{r^3} ; \vec{r}\right) + \frac{1}{r^3}\,\text{div}\,\vec{r} = \left(\frac{-3\vec{r}}{r^5} ; \vec{r}\right) + \frac{1}{r^3}\cdot 3 = 0$$

et de plus :

$$\int dv\ \Delta\frac{1}{r} = \int_{\text{Sphère}} dv\ \Delta\frac{1}{r} = \oint_{\text{Sphère}} \left(d\vec{\sigma} ; \vec{\text{grad}}\,\frac{1}{r}\right) = -4\pi$$

ce qui achève la démonstration. x

c) Les fonctions de Legendre



Elles s'introduisent tout naturellement dans la recherche du potentiel scalaire d'une charge ponctuelle placée à une distance a de l'origine :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{C_e}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{C_e}{4\pi\epsilon}\, Q\left(r^2 - 2raz + a^2\right)^{-1/2}$$

où nous avons posé $r = |\vec{x}|$, $z = \cos\theta$.

---

x Si $T[\varphi] = \int q(x)\cdot\varphi(x)\,dx$. On dit que $q(x)$ est associé à la distribution $T[\varphi]$. Nous nous sommes servis du Th XXXV (page 99 T. 1 "Distributions") de L. Schwartz qui s'exprime en ces termes : " toute mesure ayant pour support l'origine est proportionnelle à la mesure de Dirac."

si $r > a$:

$$(r^2 - 2raz + a^2)^{-1/2} = r^{-1}\left(1 - 2\frac{a}{r}z + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$= r^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\left(-2\frac{a}{r}z + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(-2\frac{a}{r}z + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 - \dots\right)$$

$$= \frac{1}{r}P_0(z) + \frac{a}{r^2}P_1(z) + \frac{a^2}{r^3}P_2(z) + \cdots$$

où $P_0(z) = 1$ $\quad P_1(z) = z \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \quad \dots$

sont les polynômes de Legendre.

De même si $r < a$ on trouve : $(r^2 - 2raz + a^2)^{-1/2}$

$$= \sum_0^\infty \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(z)$$

Interprétation physique : On voit immédiatement que si $a \ll r$ le potentiel est le même que si la charge était placée à l'origine. Plaçons alors une charge $-Q$ à l'origine le potentiel devient :

$$\frac{Ce}{4\pi\varepsilon} Q\left(\frac{a}{r^2}P_1(z) + \frac{a^2}{r^3}P_2(z) + \cdots\right)$$

si $a \to 0$ et $Q \to \infty$ mais $a.Q = p$ restant constant, on dira qu'il s'agit d'un dipôle dont le moment dipôlaire est p, son potentiel sera

$$\frac{Ce}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{p P_1(z)}{r^2}$$

Et de même, lorsque ensuite on place un dipôle de moment $-p$ à l'origine, le potentiel devient :

$$\frac{Ce}{4\pi\varepsilon} Q\left(\frac{a^2}{r^3}P_2(z) + \frac{a^3}{r^4}P_3(z) + \cdots\right)$$

si $a \to 0$ et $Q \to \infty$ mais $Qa^2 = ap = q$ restant fini, on dit qu'il s'agit d'un quadripôle dont le moment quadripôlaire est q, son potentiel sera :

$$\frac{Ce}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q P_2(z)}{r^3}$$

Vu ces remarques et vu la linéarité du laplacien il est évident que :

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n+1}} P_n(z)\right) = 0 \qquad \text{si } r \neq 0$$

Explicitons cette formule : en coordonnées sphériques et dans le cas où il y a symétrie axiale on a :

$$\Delta = \left(\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\, \partial_\theta\right)$$

d'où, en posant $z = \cos\theta$, nous déduisons

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\left(\partial_r r^2 \partial_r + \partial_z (1-z^2)\partial_z\right)$$

ainsi :

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n+1}} P_n(z)\right) = \frac{1}{r^{n+3}}\left(n(n+1) P_n(z) + \partial_z(1-z^2)\partial_z P_n(z)\right) = 0$$

d'où nous tirons l'équation différentielle de Legendre, soit :

$$n(n+1) P_n(z) + \partial_z(1-z^2)\partial_z P_n(z) = 0$$

Enfin montrons que : $\Delta\left(r^n P_n(z)\right) = 0$

en effet nous avons :

$$\Delta\left(r^n P_n(z)\right) = r^{n-2}\left(n(n+1)P_n(z) + \partial_z(1-z^2)\partial_z P_n(z)\right) = 0$$

c.q.f.d.

ainsi :

$$\varphi = \sum_n \left(A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}}\right) P_n(z)$$

est solution de l'équation $\Delta\varphi = 0$ pour $r \neq 0$

d) Considérons une sphère conductrice de rayon R dont le centre se trouve à une distance $a > R$ d'une charge ponctuelle Q. Soit ϕ_0 le potentiel de la sphère ; cherchons $\phi(\vec{x})$ à l'extérieur de la sphère en supposant $\phi(\vec{x})$ nul à l'infini :

En l'absence de conducteur nous aurions :

$$\phi_1 = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{|\vec{x}-\vec{a}|}$$

donc pour $r < a$

$$\phi_1 = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon} Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(z)$$

En l'absence de charge nous pouvons écrire:

$$\phi_2 = \sum_n B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(z) \quad \text{car} \quad \phi_2 = 0 \text{ à l'infini}$$

ainsi sur la sphère

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{ceQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} + B_0 \frac{1}{R} + \sum_{n\neq 0}^{\infty}\left(\frac{ceQR^n}{4\pi\varepsilon a^{n+1}} + \frac{B_n}{R^{n+1}}\right)P_n(z) = \phi_0$$

d'où nous tirons :

$$B_n = \frac{-ceQ}{4\pi\varepsilon}\frac{R^{2n+1}}{a^{n+1}} \qquad n\neq 0$$

posons alors : $\quad b = \frac{R^2}{a} \quad$ et $\quad Q' = -\frac{R}{a}Q$

il vient : $\quad B_n = \frac{ce}{4\pi\varepsilon} Q' b^n \qquad n \neq 0$

enfin $\quad B_0 = R\phi_0 + \frac{ce}{4\pi\varepsilon}Q'$

d'où la solution :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{ce}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q'b^n}{r^{n+1}}P_n(z)\right) + \frac{R}{r}\phi_0$$

$$\left[\ \phi = \frac{ce}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \frac{Q'}{|\vec{x}-\vec{b}|}\right) + \phi_0\frac{R}{r}\right.$$

Remarque : Lorsque $R\to\infty$ et $a\to\infty$, $\mathbf{a-R} = d$ restant constant, la sphère devient un plan, $Q'\to -Q$ et $b\to a-2d$ et en changeant d'origine

$$\phi \to \frac{ce}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q}{|\vec{x}-\vec{d}|} - \frac{Q}{|\vec{x}+\vec{d}|}\right) + \phi_0$$

c'est le potentiel créé par une charge Q située à une distance d d'un conducteur plan au potentiel ϕ_0, mais c'est aussi le potentiel créé par deux charges Q et $-Q$ distantes de $2d$.

e) Si $a < R$ la charge se trouve à l'intérieur de la sphère. Cherchons le potentiel à l'intérieur de la sphère:

en l'absence de conducteur pour $r > a$

$$\phi_1 = \frac{ce}{4\pi\varepsilon} Q \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(z)$$

en l'absence de charge nous pouvons écrire :

$$\phi_2 = \sum_n A_n r^n P_n(z) \qquad \text{car} \qquad \Delta \phi_2(0) = 0$$

ainsi sur la sphère :

$$\phi_0 = \phi_1 + \phi_2 = \frac{C_e}{4\pi\varepsilon} Q \frac{1}{R} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_e Q a^n}{4\pi\varepsilon R^{n+1}} + A_n R^n \right) P_n(z)$$

d'où nous tirons :

$$A_n = \frac{-C_e}{4\pi\varepsilon} Q \frac{a^n}{R^{2n+1}} = \frac{C_e}{4\pi\varepsilon} \frac{Q'}{b^{n+1}}$$

où nous avons posé comme précédemment :

$$b = \frac{R^2}{a} \qquad \text{et} \qquad Q' = -\frac{R}{a} Q$$

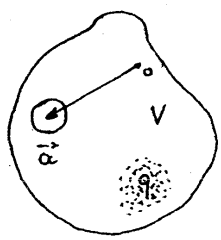
ainsi que :

$$A_0 = \phi_0 \pm \frac{C_e}{4\pi\varepsilon} Q \frac{1}{R}$$

d'où la solution :

$$\left[\quad \phi = \frac{C_e}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{Q}{|\vec{x} - \vec{a}|} + \frac{Q'}{|\vec{x} - \vec{b}|} \right) + \phi_0 \right.$$

2) Retour au problème général.



Considérons un espace V borné par un conducteur C. Soit $\phi = 0$ le potentiel de C. Excluons le point $\vec{a}$ par une petite sphère S_a et introduisons la fonction de Green :

$$\psi(\vec{a}, \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} + X(\vec{a}, \vec{x})$$

où $X(\vec{a}, \vec{x})$ est telle que $\psi = 0$ sur C et $\Delta X = 0$ dans V

Alors $\Delta \psi = 0$ pour $\vec{x} \neq \vec{a}$

Nous avons alors :

$$\int dv (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) = \oint \left(d\vec{\sigma} ; \left(\psi\, \vec{\text{grad}}\, \phi - \phi\, \vec{\text{grad}}\, \psi \right) \right)$$

car :

$$\text{div}(f\, \vec{\text{grad}}\, g) = f \Delta g + (\vec{\text{grad}}\, f ; \vec{\text{grad}}\, g)$$

qui donne $\quad -\frac{ce}{\varepsilon}\int dv\,\psi q$

$$= \lim_{r\to 0} \oint_{S_a} -d\Omega\, r^2 \left([\vec{r}]\, ; \left[\left(\frac{1}{r} + X \right) \vec{\mathrm{grad}}\,\phi \;-\; \phi \left(\frac{-[\vec{r}]}{r^2} + \vec{\mathrm{grad}}\, X \right) \right] \right)$$

$$= -4\pi\, \phi(\vec{a})$$

ainsi on a la solution :

$$\left[\quad \phi(\vec{x}) = \frac{ce}{4\pi\varepsilon} \int dv\; \psi(\vec{x},\vec{y})\, q(\vec{y}) \right.$$

<u>Lemme:</u> $\quad \psi(\vec{a},\vec{b}) = \psi(\vec{b},\vec{a})$

Démonstration : nous excluerons par deux petites sphères S_a et S_b les points $\vec{a}$ et $\vec{b}$, nous avons alors :

$$0 = \int dv \Big(\psi(\vec{a},\vec{x})\, \Delta\psi(\vec{b},\vec{x}) \;-\; \psi(\vec{b},x)\, \Delta\psi(\vec{a},\vec{x}) \Big)$$

$$= \oint_{S_a \text{ et } S_b} \Big(d\vec{\sigma}\, ; \big(\psi(\vec{a},\vec{x})\, \vec{\mathrm{grad}}\, \psi(\vec{b},\vec{x}) - \psi(\vec{b},\vec{x})\, \vec{\mathrm{grad}}\, \psi(\vec{a},\vec{x}) \big) \Big)$$

$$= \lim_{r_a \to 0} \int -d\Omega\; r_a^2 \Big([\vec{r}_a]\, ; \Big[\Big(\frac{1}{r_a} + X(\vec{a},\vec{x}) \Big) \vec{\mathrm{grad}}\, \psi(\vec{b},\vec{x})$$
$$- \psi(\vec{b},\vec{x}) \Big(\frac{-[\vec{r}_a]}{r_a^2} + \vec{\mathrm{grad}}\, X(\vec{a},\vec{x}) \Big) \Big] \Big)$$

$$+ \lim_{r_b \to 0} \int -d\Omega\; r_b^2 \Big([\vec{r}_b]\, ; \Big[\psi(\vec{a},\vec{x}) \Big(\frac{-[\vec{r}_b]}{r_b^2} + \vec{\mathrm{grad}}\, X(\vec{b},\vec{x}) \Big)$$
$$- \Big(\frac{1}{r_b} + X(\vec{b},\vec{x}) \Big) \vec{\mathrm{grad}}\, \psi(\vec{a},\vec{x}) \Big] \Big)$$

$$= 4\pi \Big(-\psi(\vec{b},\vec{a}) + \psi(\vec{a},\vec{b}) \Big)$$

c.q.f.d.

Cas particulier : Si C est une sphère de rayon R on peut expliciter $\psi(\vec{a},\vec{x})$ en nous servant du résultat trouvé en 1) e) :

$$\psi(\vec{a},\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|} - \frac{R}{a}\,\frac{1}{\left|\vec{x}-\left(\frac{R}{a}\right)^2\vec{a}\right|}$$

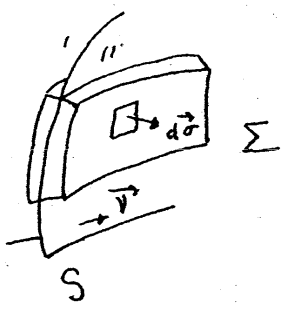
si $R \to \infty$ nous trouvons : $\psi(\vec{a},\vec{x}) = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}$

ainsi le potentiel dû à une distribution de charge dans l'espace est donné par :

$$\phi = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon}\int dV\,\frac{q(\vec{y})}{|\vec{y}-\vec{x}|}$$

3) Charges superficielles.

Soit une surface S portant des charges superficielles, orientons S d'après sa normale $\vec{\nu}$, et considérons l'élément $\delta\vec{\sigma}$ de S enfermé dans Σ. Nous avons :

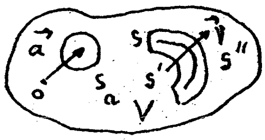


$$\oint_\Sigma (d\vec{\sigma}\,;\vec{D}) = c_e\,\delta Q \qquad \text{d'où}$$

$$\delta\vec{\sigma}\,(\vec{D}''-\vec{D}') = c_e\,\delta\sigma\,\omega$$

où ω est la densité de charges superficielles. Nous en déduisons :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_\nu\,\phi'' - \overrightarrow{\text{grad}}_\nu\,\phi' = -\frac{c_e}{\varepsilon}\,\omega \qquad ^{\times}$$



Reprenons alors le problème traité en 2), mais supposons, en plus, qu'il existe une surface S portant des charges superficielles, surface que nous enfermerons entre deux surfaces S' et S'' infiniment voisines.

x $\overrightarrow{\text{grad}}_\nu\,\phi = (\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi\,;\vec{\nu})$ $\quad\vec{\nu}$ étant unitaire.

Nous trouvons :

$$\int_V dv\,(\psi\,\Delta\phi - \phi\,\Delta\psi) = -\frac{c_e}{\varepsilon}\int_V dv\,\psi q$$

$$= -4\pi\,\phi(\vec{a}) + \int_S \Big(d\vec{\sigma}\,;\,\big[(\psi\,\vec{\text{grad}}\,\phi' - \phi'\,\vec{\text{grad}}\,\psi) - (\psi\,\vec{\text{grad}}\,\phi'' - \phi''\,\vec{\text{grad}}\,\psi)\big]\Big) \qquad (\alpha)$$

or $$\int_S \big(d\vec{\sigma}\,;(\vec{\text{grad}}\,\phi' - \vec{\text{grad}}\,\phi'')\psi\big) = \frac{c_e}{\varepsilon}\int_S d\sigma\,\psi\,\omega$$

enfin définissons $\eta = \frac{\varepsilon}{c_e}(\phi'' - \phi')$

d'où nous pouvons écrire :

$$\phi(\vec{a}) = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon}\Big[\int dv\,\psi(\vec{a},\vec{x})\,q(\vec{x}) + \int_S d\sigma\,\psi(\vec{a},\vec{x})\,\omega(\vec{x}) + \int_S \big(d\vec{\sigma}\,;\,\vec{\text{grad}}\,\psi(\vec{a},\vec{x})\big)\,\eta(\vec{x})\Big]$$

4) <u>Interprétation de η : Densité de polarisation.</u>

Soit le cas particulier où le conducteur C est à l'infini.

Nous avons : $$\psi(\vec{a},\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}$$

Si $q = 0$ nous affirmons que :

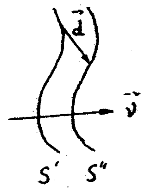
$$\phi(\vec{a}) = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon}\int_S d\sigma\,\frac{\omega(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{a}|}$$

est le potentiel dû aux charges superficielles situées sur S. En effet $\Delta\phi(\vec{a}) = 0$ si $\vec{a}$ n'est pas sur S, de plus $\phi(\vec{a})$ ne subit aucune discontinuité lorsque $\vec{a}$ traverse S : c'est à dire que $\phi'' - \phi' = 0$. Ainsi en introduisant cette valeur de ϕ dans (α) au paragraphe précédent et en raisonnant sur un élément infinitésimal de S on retrouve la relation de définition :

$$\vec{\text{grad}}_\nu\,\phi'' - \vec{\text{grad}}_\nu\,\phi' = -\frac{c_e}{\varepsilon}\,\omega$$

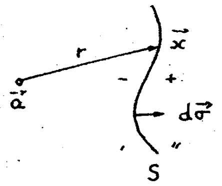
c.q.f.d.

Considérons alors 2 telles surfaces S' et S'' portant des charges de signes contraires. Si $\vec{d}$ "la distance" séparant ces 2 surfaces tend vers 0 le potentiel sera :



$$\phi(\vec{a}) = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon} \lim_{d\to 0} \left(\int_{S'} \frac{-d\sigma\, \omega}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \int_{S''} \frac{d\sigma\, \omega}{|\vec{x}-\vec{a}|} \right)$$

$$= \frac{c_e}{4\pi\varepsilon} \lim_{d\to 0} \int_S d\sigma \left(\vec{d}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{1}{r}\right) \omega$$



Imposons $\vec{d} \,/\!/\, \vec{\nu}$ et posons $\omega d = \eta$ en remarquant que :

$$d\sigma(\vec{d}\,; \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tfrac{1}{r}) = d\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tfrac{1}{r}\,;\, d\vec{\sigma})$$

$$= -\frac{(d\vec{\sigma}\,; [\vec{r}\,])}{r^2} d = \pm\, d\Omega . d$$ l'angle solide, il vient lorsque $d \to 0$, $\omega \to \infty$, η restant fini :

$$\phi(\vec{a}) = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon} \int_S \pm d\Omega\, \eta$$

d'où

$$\left[\quad \phi'' - \phi' = \frac{c_e}{\varepsilon} \eta \right.$$

S est dite polarisée et η est la densité de polarisation.

Ainsi le potentiel dû à des charges spatiales, à des charges superficielles et à une surface polarisée sera :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon} \left(\int dv\, \psi(\vec{x},\vec{y})\, q(\vec{y}) + \int_S d\sigma\, \psi(\vec{x},\vec{y})\, \omega(\vec{y}) + \int_S (d\vec{\sigma}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \psi(\vec{x},\vec{y}))\, \eta(\vec{y}) \right)$$

Dans le cas particulier où C est à l'infini :

$$\psi(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

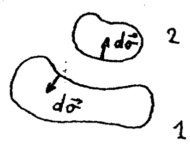
et en remarquant que : $(d\vec{\sigma}\,; \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \psi) = \pm\, d\Omega$, on trouve :

$$\left[\quad \phi(\vec{x}) = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon} \left(\int dv \frac{q(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \int_S d\sigma \frac{\omega(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} + \int_S \pm d\Omega\, \eta(\vec{y}) \right) \right]$$

5) <u>Définition de la capacité de 2 conducteurs de charge opposée</u>

Soit 2 conducteurs de charge $-Q$ et $+Q$

$$U = \frac{1}{2C_e}\int dv\,(\vec{E};\vec{D}) = -\frac{1}{2C_e}\int dv\,(\vec{\text{grad}}\,\phi;\vec{D})$$



$$= -\frac{1}{2C_e}\oint_{1\,\text{et}\,2}(d\vec{\sigma};\vec{D})\,\phi + \frac{1}{2C_e}\int dv\,\phi\,\text{div}\vec{D}$$

$$= -\frac{1}{2C_e}\sum_1^2 \phi_i \oint(d\vec{\sigma};\vec{D}) = \frac{1}{2}\sum_1^2 \phi_i Q_i$$

d'où

$$U = \frac{1}{2}\,Q\,(\phi_1 - \phi_2)$$

Mais ϕ est proportionnel à Q, car si on double ϕ, $\vec{D} = -\varepsilon\,\vec{\text{grad}}\,\phi$ double et $Q = -\frac{1}{C_e}\int(d\vec{\sigma};\vec{D})$ double aussi.
Ainsi nous pouvons écrire :

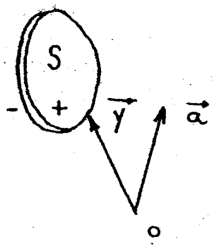
$$\left[\quad U = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{K}\,Q^2\right.$$

Par définition K est la capacité des deux conducteurs.

IV

La couche à polarisation η constante

Soit S une couche à polarisation η constante, cherchons à déterminer le champ $\vec{E}$ dû à cette couche. Nous avons



$$\vec{E} = -\, \overrightarrow{grad}\, \phi$$

ce qui nous permet d'écrire :

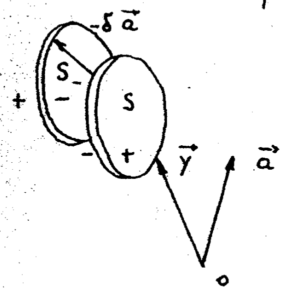
$$(\vec{E}(\vec{a})\,;\delta\vec{a}) = \phi(\vec{a}) - \phi(\vec{a}+\delta\vec{a})$$

Mais au lieu de déplacer le point $\vec{a}$ nous pouvons déplacer la couche, puis en changeant le signe de la polarisation nous trouvons :

$$(\vec{E}(\vec{a})\,;\delta\vec{a}) = \phi_S(\vec{a}) + \phi_{S_-}(\vec{a})$$

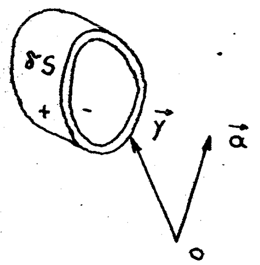
D'autre part nous avons trouvé :

$$\phi(\vec{a}) = \int \pm\, d\Omega\, \eta = \frac{c\eta}{4\pi\varepsilon}\,\Omega$$



Ω étant l'angle solide sous lequel on voit le contour de la couche avec le signe $\pm$ suivant que l'on voit[x] le côté $\pm$ à l'intérieur du contour.

Ainsi lorsque la couche est fermée le potentiel est nul à l'extérieur et égal à $\pm \frac{c\eta}{\varepsilon}$ à l'intérieur.



En nous servant de cette remarque nous pouvons écrire :

$$(\vec{E}(\vec{a})\,;\delta\vec{a}) = \phi_S(\vec{a}) + \phi_{S_-}(\vec{a})$$

$$= \phi_{\delta S}(\vec{a})$$

Pour achever le calcul de $\vec{E}$, on a avantage à introduire la notion de vecteur axial, élément géométrique possédant une longueur, une

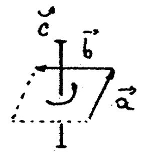
---

x Le côté de la couche polarisée qui contient des charges de même signe que η est dit positif.

direction, et un sens de rotation. Ce nouvel être géométrique permet de définir le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$[\vec{a} \wedge \vec{b}] = \breve{c}$$

où $\breve{c}$ est précisément un vecteur axial de longueur $ab \sin\theta$, de direction $\perp$ à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et de sens de rotation déterminé par la sucession $\vec{a}\,\vec{b}$. Enfin on peut définir le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs, l'un polaire et l'autre axial. [x]

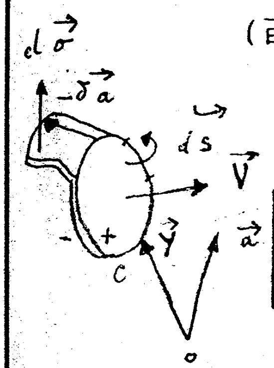


Et ainsi nous pouvons écrire :

$$(\vec{E};\delta\vec{a}) = \frac{c e \eta}{4\pi\varepsilon}\int_{\delta S}\frac{(d\vec{\sigma};[\vec{r}])}{r^2}$$

or

$$d\vec{\sigma} = [d\breve{s} \wedge \delta\vec{a}] \qquad \text{d'où}$$



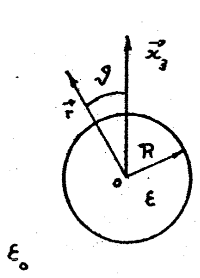
$$(\vec{E};\delta\vec{a}) = \frac{c e \eta}{4\pi\varepsilon}\oint_C\frac{(d\breve{s};\delta\vec{a};[\vec{r}])}{r^2} \qquad \text{et}$$

$$\vec{E} = \frac{c e \eta}{4\pi\varepsilon}\oint_C\frac{[[\vec{r}] \wedge d\breve{s}]}{r^2} \qquad \text{ou encore}$$

$$\vec{E} = \frac{c e \eta}{4\pi\varepsilon}\oint_C\frac{[d\breve{s} \wedge (\vec{a}-\vec{y})]}{|\vec{a}-\vec{y}|^3}$$

V

Sphère diélectrique dans un champ homogène.



$\vec{E}_\infty \parallel [\vec{x}_3]$

d'où la condition $\phi_\infty = -E_\infty x_3 = -E_\infty r P_1(z)$

où $z = \cos\vartheta$

$$\phi(\vec{r},z) = \begin{cases} \phi^{ext} = -E_\infty r P_1(z) + \sum_0^\infty A_n \dfrac{P_n(z)}{r^{n+1}} \\ \phi^{int} = \sum B_n r^n P_n(z) \end{cases}$$

Conditions aux limites :

1) $E_t^{ext} = E_t^{int}$ et pas de couche polarisée

---

x Voir appendice.

d'où $\phi^{ext}(R) = \phi^{int}(R)$

2) $D_\nu^{ext} = D_\nu^{int}$ d'où $\varepsilon_0 \partial_r \phi^{ext}(R) = \varepsilon \partial_r \phi^{int}(R)$

ce qui donne pour $n \neq 1$

$$\frac{A_n}{R^{n+1}} = B_n R^n \qquad \text{d'où} \qquad \frac{A_n}{B_n} = R^{2n+1}$$

$$\varepsilon_0 \frac{-(n+1) A_n}{R^{n+2}} = \varepsilon\, n B_n R^{n-1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{A_n}{B_n} = \frac{-n}{n+1} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} R^{2n+1}$$

or $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} > 0$ donc $A_n = B_n = 0$ et pour $n = 1$

$$- E_\infty R + \frac{A_1}{R^2} = B_1 R$$

$$\varepsilon_0 \left(- E_\infty - \frac{2 A_1}{R^3} \right) = \varepsilon B_1 \qquad \text{d'où}$$

$$-3 \varepsilon_0 E_\infty = (2 \varepsilon_0 + \varepsilon) B_1 \qquad \text{d'où}$$

$$B_1 = \frac{-3 \varepsilon_0 E_\infty}{2 \varepsilon_0 + \varepsilon} \qquad \text{et}$$

$$A_1 = (B_1 + E_\infty) R^3 = R^3 E_\infty \left(1 - \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon}\right) = R^3 E_\infty \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2 \varepsilon_0}$$

et ainsi :

$$\phi_{int} = \frac{-3 \varepsilon_0 E_\infty}{2 \varepsilon_0 + \varepsilon} \cdot rz = \frac{-3 \varepsilon_0 x_3}{2 \varepsilon_0 + \varepsilon} E_\infty \qquad \text{d'où}$$

$$\vec{E}_{int} = [\vec{x}_3]\, E_\infty \frac{3 \varepsilon_0}{2 \varepsilon_0 + \varepsilon}$$

$$\phi_{ext} = - E_\infty\, rz + \frac{C_e}{4\pi \varepsilon_0}\, p \frac{z}{r^2}$$

où
$$p = \frac{4\pi \varepsilon_0}{C_e} : \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2 \varepsilon_0} \cdot R^3 E_\infty$$

VI

Le corps polarisé

Au lieu d'écrire : $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ écrivons :

$$\vec{D} = \vec{D}_o + c_e \vec{P} \quad \text{où} \quad \vec{D}_o = \varepsilon_o \vec{E}$$

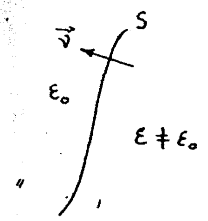
Nous devons avoir :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \vec{D}_o + c_e \operatorname{div} \vec{P} = c_e\, q$$

c'est à dire :

$$\left[\ \operatorname{div} \vec{D}_o = c_e (q - \operatorname{div} \vec{P})\right.$$

q = densité de charge vraie et
$\operatorname{div} \vec{P}$ = densité de charge libre



Mais nous devons encore tenir compte des conditions aux limites de deux diélectriques :

$$D''_v - D'_v = D''_{ov} - D'_{ov} + c_e(-P_v) = c_e\, \omega$$

où ω est la densité de charge superficielle vraie.

Nous en déduisons :

$$\left[\ D''_{ov} - D'_{ov} = c_e (\omega + P_v)\right.$$

ainsi P_v est une densité de charge superficielle libre.

Ainsi, par comparaison, nous sommes conduit à écrire :

$$\left[\ \phi = \frac{c_e}{4\pi\, \varepsilon_o} \left(\int dv\, \frac{q - \operatorname{div} \vec{P}}{r} + \int_S d\sigma\, \frac{\omega + P_v}{r} \right)\right.$$

et à poser :

$$\left[\ Q_{\text{Libre}} = \int dv (-\operatorname{div} \vec{P}) + \int_S d\sigma\, P_v \quad = 0\right.$$

Mais pour donner une interprétation de $\vec{P}$ nous allons montrer qu'en cherchant le champ dû à des dipôles dont la densité de moment vaut :

$$\vec{P} = \operatorname{Lim} \vec{c}\, q \quad \text{lorsque} \quad q \to \infty \quad \text{et} \quad \vec{c} \to 0$$

nous retrouvons :

$$\phi = \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\int dv\ \frac{-\operatorname{div}\vec{P}}{r} + \int_S \frac{(d\vec{\sigma}\,;\,\vec{P})}{r}\right)$$

En effet on a :

$$\phi(\vec{a}) = \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \lim \int dv\left(\frac{q(\vec{x}-\vec{c})}{|\vec{x}-\vec{a}|} - \frac{q(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right)$$

$$= \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_0}\ \lim \int dv\ q(x)\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{c}-\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right)$$

$$= \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_0}\int dv\left(\vec{P}\,;\ \vec{\operatorname{grad}}\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right)$$

d'où en intégrant par parties :

$$\phi(\vec{a}) = \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\int dv\ \frac{-\operatorname{div}\vec{P}}{|\vec{x}-\vec{a}|} + \int_S \frac{(d\vec{\sigma}\,;\,\vec{P})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\right)$$

c. q. f. d.

Or nous avions $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ donc nous devons poser :

$$\left[\ \vec{P} = \alpha\,\vec{E}\right.$$

où α est la polarisabilité.

Ainsi :

$$\varepsilon_0 + c_e\,\alpha = \varepsilon \qquad \text{d'où}$$

$$\left[\ \alpha = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{c_e}\right.$$

Comme application reprenons le problème de la sphère diélectrique dans un champ homogène :
En devinant nous pouvons écrire :

$$\phi_{ext}(\vec{x}) = \lim \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{|\vec{x}-\vec{c}|} - \frac{Q}{|\vec{x}|}\right) - E_\infty\, r z$$

$$= \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_0}\ p\ \frac{z}{r^2} - E_\infty\, r.z \qquad \text{où}$$

$$\vec{p} = \lim Q\vec{c} = \int dv\ \vec{P} = \frac{4\pi}{3}\,R^3\,\vec{P}$$

Puis

$$\phi_{int}(\vec{x}) = -\operatorname{Lim} \frac{c_e}{6\,\varepsilon_o}\left(q(\vec{x}-\vec{c})^2 - q(\vec{x})^2 \right) - E_\infty\, r z$$

$$= \operatorname{Lim} \frac{c_e}{3\,\varepsilon_o}\, q\,|\vec{c}|\, r z - E_\infty\, r z$$

$$= \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \frac{4\pi}{3}\, P\, r z - E_\infty\, r z$$

d'où nous pouvons écrire :

$$-\,\vec{\operatorname{grad}}\,\phi_{int} = \vec{E}_\infty - \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{4\pi}{3}\,\vec{P} = \vec{E}_{int}$$

$$= \vec{E}_\infty - \frac{c_e}{4\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{4\pi}{3}\,\alpha\,\vec{E}_{int} \qquad \text{d'où}$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_\infty \frac{1}{1 + \frac{c_e}{3\,\varepsilon_o}\alpha} = \vec{E}_\infty \frac{3\,\varepsilon_o}{2\,\varepsilon_o + \varepsilon}$$

alors :

$$p = \frac{4\pi}{3} R^3 P = \frac{4\pi}{3} R^3 \alpha\, E$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3\, \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{c_e} \cdot \frac{3\,\varepsilon_o\, E_\infty}{2\,\varepsilon_o + \varepsilon}$$

$$= \frac{4\pi\,\varepsilon_o}{c_e} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_o}{2\varepsilon_o + \varepsilon} \cdot R^3\, E_\infty$$

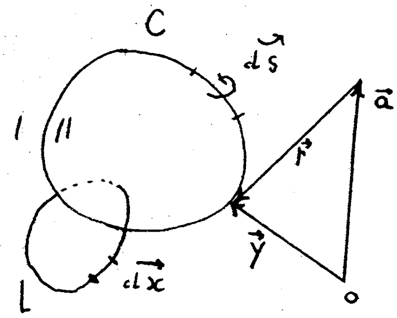
Ainsi on retrouve bien les formules du chapitre V

VII

Courants stationnaires.

1) Introduction :

Considérons une couche à polarisation constante η, elle produit un champ :



$$\vec{E}(\vec{a}) = -\frac{C_e \eta}{4\pi\varepsilon} \oint_C \frac{[\vec{ds} \wedge (\vec{a}-\vec{y})]}{|\vec{a}-\vec{y}|^3}$$

$$= \frac{C_e \eta}{4\pi\varepsilon} \oint_C \frac{[\vec{r} \wedge \vec{ds}]}{r^3}$$

Mais de plus nous avons :

$$\int_{L''}^{'} (\vec{D} ; \vec{dx}) = \varepsilon (\phi'' - \phi') = C_e \eta \qquad (1)$$

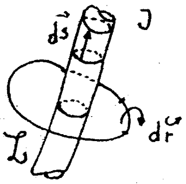
Si nous plaçons dans ce champ une charge ponctuelle Q, elle subira une force $\vec{E}Q$ et, en vertu de la loi de l'action et de la réaction, la couche subira au total une force égale à $-\vec{E}Q$. Si nous supposons la couche rigide, nous pouvons considérer que seuls ses bords supportent des forces soit :

$$d\vec{K} = \frac{C_e \eta}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{[\vec{ds} \wedge \vec{r}]}{r^3} Q = [\eta \, \vec{ds} \wedge \vec{E}_Q] \qquad (2)$$

où

$$\vec{E}_Q = \frac{C_e}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} Q$$ est identique au champ produit par une charge ponctuelle Q.

Par analogie avec (1) et (2) considérons un courant fermé d'intensité J (J caractérise un tube de courant, tube fermé sur lui-même.) satisfaisant par définition l'équation :



$$\oint_{\mathcal{L}} (\breve{H} ; d\breve{r}) = c_j J \quad \text{ou} \quad \mathrm{rot}\,\breve{H} = c_j \vec{j}$$

où la densité de courant $\vec{j}$ est définie comme un vecteur dont la direction et le sens sont ceux du tube de courant et dont la longueur est égale à la densité de J par rapport à la section du tube.

Et nous voudrions trouver une loi de force de la forme :

$$d\vec{K} = [J\, d\vec{s} \wedge \breve{B}]$$

Pour trouver une telle loi, nous poserons que le travail dû au déplacement des tubes de courant, J restant constant, est égal à :

$$-\underline{\delta} \int \ell(\breve{H}(\vec{x}))\, dv$$

avec :

$$\delta \ell(\breve{H}) = \frac{1}{c_m} (\breve{B} ; \delta \breve{H})$$

C'est le correspondant du théorème d'énergie *

$\mathrm{rot}\,\breve{H} = c_j \vec{j}$ étant la contrainte de notre problème introduisons le facteur de Lagrange $\vec{A}(\vec{x})$ que nous appellerons le potentiel vecteur et nous sommes conduits à résoudre l'expression :

$$\underline{\delta}\left(-\int dv\, \ell + \frac{1}{c_m}\int dv\left(\vec{A} ; (\mathrm{rot}\,\breve{H} - c_j\vec{j})\right)\right) = \int (\vec{\delta s} ; d^3\vec{K})$$

---

* Physiquement nous ne pouvons pas imposer $\delta A = \delta U$ car pour que J reste constant il faut fournir au circuit une certaine énergie précisément égale au travail d'induction δA_{ind} aussi le premier principe de thermodynamique doit s'écrire ici :

$$\delta A + \delta A_{ind} = \delta U$$

x

De plus nous avons : $\delta\vec{j} = \mathrm{rot}\,[\delta\vec{s} \wedge \vec{j}]$

Nous trouvons alors :

$$\int dV\Big(-\frac{1}{c_m}(\breve{B};\delta\breve{H}) + \frac{1}{c_m}\big(\delta\vec{A}\,;\,(\mathrm{rot}\,\breve{H} - c_j\vec{j})\big)$$

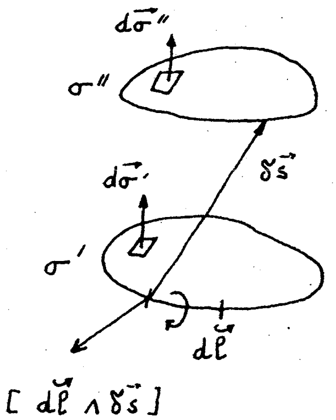
$$+\frac{1}{c_m}(\vec{A};\,\mathrm{rot}\,\delta\breve{H}) - \frac{1}{c_m}\big(\vec{A};\,\mathrm{rot}[\delta\vec{s}\wedge\vec{j}]\big)\Big) = \int(\delta\vec{s}\,;\,\delta^3\vec{R})\,dV$$

---

x Si nous déplaçons de $\delta\vec{s}$ les vecteurs d'un champ $\vec{a}$ nous trouvons :

$$\delta\vec{a} = \mathrm{rot}\,[\delta\vec{s}\wedge\vec{a}] - \mathrm{div}\,\vec{a}\cdot\delta\vec{s}$$

En effet : Remarquons que nous obtiendrons une variation de signe inverse en déplaçant les points de l'espace. Soit σ' une surface et σ'' la surface obtenue en déplaçant chaque point de σ' d'une quantité $\delta\vec{s}$. Nous avons alors par définition :



$$\int_{\sigma'}(d\vec{\sigma}\,;\,\delta\vec{a}) = -\left(\int_{\sigma''}(d\vec{\sigma}''\,;\,\vec{a}) - \int_{\sigma'}(d\vec{\sigma}'\,;\,\vec{a})\right)$$

or

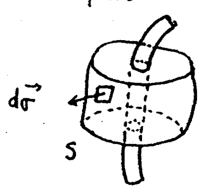
$$\int_{\sigma'}\big(\mathrm{rot}\,[\delta\vec{s}\wedge\vec{a}]\,;\,d\vec{\sigma}\big) - \int_{\sigma'}\mathrm{div}\,\vec{a}\,(\delta\vec{s}\,;\,d\vec{\sigma}')$$

$$= \oint(d\vec{l}\,;\,[\delta\vec{s}\wedge\vec{a}]) - \oint(d\vec{\sigma}\,;\,\vec{a})$$

$$= \oint([d\vec{l}\wedge\delta\vec{s}]\,;\,\vec{a}) - \oint(d\vec{\sigma}\,;\,\vec{a}) = -\left(\oint_{\sigma''}(d\vec{\sigma}''\,;\,\vec{a}) - \oint_{\sigma'}(d\vec{\sigma}'\,;\,\vec{a})\right)$$

c.q.f.d.

Mais dans notre cas $\mathrm{div}\,\vec{j} = 0$



Car un tube de courant étant fermé nous avons :

$$\int_S(d\vec{\sigma}\,;\,\vec{j}) = J - J = 0$$

Et en intégrant par parties nous pouvons écrire, en négligeant les contributions aux surfaces :[x]

$$\int dv \left(-\frac{1}{c_m} (\breve{B} ; \delta \breve{H}) + \frac{1}{c_m} \left(\delta \vec{A} ; (\mathrm{rot}\, \breve{H} - c_j \vec{J}) \right) + \frac{1}{c_m} (\mathrm{rot}\, \vec{A} , \delta \breve{H}) \right.$$

$$\left. - \frac{c_j}{c_m} \left([\vec{J} \wedge \mathrm{rot}\, \vec{A}] ; \delta \vec{s} \right) \right) = \int (\delta \vec{s} ; d^3\vec{K})$$

d'où en identifiant les coefficients des variations nous trouvons :

$$\left[\begin{array}{llll} \mathrm{rot}\, \breve{H} = c_j \vec{J} & \text{d'où} & \mathrm{div}\, \vec{J} = 0 & \\ \breve{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A} & \text{d'où} & \mathrm{div}\, \breve{B} = 0 & \\ d^3\vec{K} = -\frac{c_j}{c_m} [\vec{J} \wedge \mathrm{rot}\, \vec{A}]\, dV & & & \text{d'où} \\ d^3\vec{K} = -\frac{c_j}{c_m} [\vec{J} \wedge \breve{B}]\, dv & & & \end{array} \right.$$

Ainsi nous avons bien atteint le but que nous nous étions proposé[xx]

---

[x] Nous nous servons de la formule :

$$\mathrm{div}\, [\vec{a} \wedge \breve{b}] = (\mathrm{rot}\, \breve{b} ; \vec{a}) - (\breve{b} ; \mathrm{rot}\, \vec{a})$$

[xx] Nous trouvons ici :

$$d\vec{K} = -\frac{c_j}{c_m} [J\, d\vec{s} \wedge \breve{B}]$$

C'est la force qui tient en équilibre un élément de courant de longueur $d\vec{s}$ d'où le signe négatif.

2) Travail d'induction.

Lorsque nous déplaçons les courants en laissant J constant, le premier principe de thermodynamique doit s'écrire :

$$\delta \mathcal{U} = \delta A_{\text{géom.}} + \delta A_{\text{ind.}}$$

et l'expérience conduit à poser :

$$\delta \mathcal{U} = \int \frac{1}{c_m} (\vec{H} ; \delta \vec{B}) \, dv$$

or :

$$\delta A_{\text{géom}} = - \int \delta \ell \, dv = - \int \frac{1}{c_m} (\vec{B} ; \delta \vec{H}) \, dv$$

d'où :

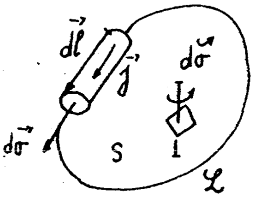
$$\delta A_{\text{ind}} = \int \frac{1}{c_m} \Big((\vec{B} ; \delta \vec{H}) + (\vec{H} ; \delta \vec{B}) \Big) \, dv$$

C'est ce que nous appelons le travail d'induction. En vertu des équations du champ (paragraphe 1) et en intégrant par parties nous pouvons écrire successivement :

$$\frac{1}{c_m} \int dv (\vec{H} ; \delta \vec{B}) = \frac{1}{c_m} \int dv (\vec{H} ; \mathrm{rot}\, \delta \vec{A})$$

$$= \frac{1}{c_m} \int dv (\mathrm{rot}\, \vec{H} ; \delta \vec{A}) = \frac{c_j}{c_m} \int dv (\vec{j} ; \delta \vec{A})$$

Mais $dJ \, d\vec{\ell} = dv \, \vec{j}$ car $dJ = (\vec{j} ; d\vec{\sigma})$ et $(d\vec{\ell} ; d\vec{\sigma}) = dv$



Ligne de courant $\mathcal{L}$ limitant la surface S

Ce qui nous montre que nous pouvons intégrer le long d'un tube de courant puis sommer sur tous les tubes.

$$\frac{c_j}{c_m} \int dv (\vec{j} ; \delta \vec{A}) = \frac{c_j}{c_m} \int dJ \oint_{\mathcal{L}} (d\vec{\ell} ; \delta \vec{A})$$

$$= \frac{c_j}{c_m} \int dJ \int_S (d\vec{\sigma} ; \mathrm{rot}\, \delta \vec{A})$$ d'où

$$\frac{1}{c_m} \int dv (\vec{H} ; \delta \vec{B}) = \frac{c_j}{c_m} \underset{\substack{\text{sur tous} \\ \text{les tubes}}}{\int dJ} \int_S (d\vec{\sigma} ; \delta \vec{B})$$

D'une manière analogue nous trouvons :

$$\frac{1}{c_m}\int dv\,(\breve{\vec{B}};\delta\breve{\vec{H}}) = \frac{1}{c_m}\int dv\,(\mathrm{rot}\,\vec{A};\delta\breve{\vec{H}}) = \frac{1}{c_m}\int dv\,(\vec{A};\mathrm{rot}\,\delta\breve{\vec{H}})$$

$$= \frac{c_j}{c_m}\int dv\,(\vec{A};\delta\vec{j}) = \frac{c_j}{c_m}\int dv\,(\vec{A};\mathrm{rot}\,[\delta\vec{s}\wedge\vec{j}]) = \frac{c_j}{c_m}\int dv\,(\mathrm{rot}\,\vec{A};[\delta\vec{s}\wedge\vec{j}])$$

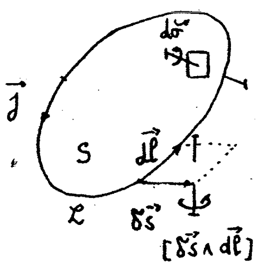
$$= \frac{c_j}{c_m}\int dv\,(\breve{\vec{B}};[\delta\vec{s}\wedge\vec{j}]) = \frac{c_j}{c_m}\int dv\,(\vec{j};[\breve{\vec{B}}\wedge\delta\vec{s}])$$

$$= \frac{c_j}{c_m}\int dJ\oint_{\mathcal{L}}(d\vec{\ell};[\breve{\vec{B}}\wedge\delta\vec{s}])$$ d'où

$$\frac{1}{c_m}\int dv\,(\breve{\vec{B}};\delta\breve{\vec{H}}) = \frac{c_j}{c_m}\underset{\substack{\text{sur tous}\\ \text{les tubes}}}{\int} dJ\oint_{\mathcal{L}}(\breve{\vec{B}};[\delta\vec{s}\wedge d\vec{\ell}])$$

Ces résultats nous permettent d'écrire :

$$\left[\begin{array}{l} \delta A_{ind} = \dfrac{c_j}{c_m}\underset{\substack{\text{sur tous}\\ \text{les tubes}}}{\int} dJ\,\underline{\delta}\psi \\[2ex] \psi = \displaystyle\int_S (d\breve{\vec{\sigma}};\breve{\vec{B}}) \end{array}\right.$$ où



en effet nous avons :

$$\underline{\delta}\psi = \int(d\breve{\vec{\sigma}};\delta\breve{\vec{B}}) + \oint(\breve{\vec{B}};[\delta\vec{s}\wedge d\vec{\ell}])$$

Nous n'avons pas supposé de relations entre $\breve{\vec{B}}$ et $\breve{\vec{H}}$ et ainsi les formules classiques que nous avons trouvées sont valables dans tous les cas.

3) Les aimants :

Nous supposerons que $\vec{B}$ est une fonction univoque de $\vec{H}$ ce qui suppose déjà qu'il n'y a pas d'hystérèse.

Dans certain cas :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \mu \text{ étant la perméabilité}$$

Si $\frac{\mu}{\mu_0} < 1$ c'est le diamagnétisme

si $\frac{\mu}{\mu_0} > 1$ c'est le paramagnétisme

Mais si $\frac{\mu}{\mu_0} \cong 10^4$ ou plus c'est le ferromagnétisme

Considérons le cas où il y a de la rémanence, c'est à dire lorsque nous avons :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + c_m \vec{M}$$

C'est le cas pour les aimants permanents idéaux.
En l'absence de courants, les champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ satisfont aux équations :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = 0$$

La seconde équation est équivalente à l'existence d'un pseudo-scalaire $\mathring{\varphi}$ tel que

$$\left[\; \vec{H} = -\operatorname{grad} \mathring{\varphi} \right.$$

Posons ensuite :

$$\operatorname{div} \vec{M} = -\mathring{q} \quad \text{et} \quad \mu \vec{H} = \vec{B}'$$

La première équation s'écrit alors :

$$\left[\operatorname{div} \vec{B}' = c_m \mathring{q} \right.$$

Enfin nous avons :

$$\delta u = \frac{1}{c_m} \left(\vec{H} ; \delta \vec{B} \right)$$

d'où nous déduisons :

$$u = \int_{c_m \vec{\eta}}^{\vec{B}} \frac{1}{c_m} \left(\vec{H}(\vec{B}) ; d\vec{B} \right)$$

ainsi : x

$$u = \frac{1}{2 c_m \mu} \vec{B}'^{2}$$

Il nous reste à trouver la loi de force

$$\underline{\delta} U = \int dv \left(-\frac{1}{2c_m} \mu^{-2} \delta\mu \vec{B}'^{2} + \frac{1}{c_m} \left(\mu^{-1} \vec{B}' ; \delta \vec{B}' \right) \right)$$

or $\mu^{-1} \vec{B}' = \vec{H} = -\operatorname{grad} \overset{\circ}{\varphi}$ d'où

$$\underline{\delta} U = \int dV \left(-\frac{1}{2c_m} \vec{H}^{2} \delta\mu + \frac{1}{c_m} \left(-\operatorname{grad} \overset{\circ}{\varphi} ; \delta \vec{B}' \right) \right)$$

$$= \int dV \left(-\frac{1}{2c_m} \vec{H}^{2} \delta\mu + \frac{1}{c_m} \overset{\circ}{\varphi} \operatorname{div} \delta \vec{B}' \right)$$

mais · xx

$$\delta\mu = -(\delta\vec{s} ; \operatorname{grad}\mu) \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \delta\vec{B}' = c_m \delta \overset{\circ}{q} = -c_m \operatorname{div}(\delta\vec{s}\, \overset{\circ}{q})$$

d'où

$$\underline{\delta} U = \int dv \left[\frac{1}{2c_m} \vec{H}^{2} (\operatorname{grad}\mu ; \delta\vec{s}) - \overset{\circ}{\varphi} \operatorname{div}(\delta\vec{s} ; \overset{\circ}{q}) \right]$$

$$= \int dv \left[\frac{1}{2c_m} \vec{H}^{2} (\operatorname{grad}\mu ; \delta\vec{s}) + (\operatorname{grad} \overset{\circ}{\varphi} ; \delta\vec{s}) \overset{\circ}{q} \right]$$

$$= \int dv \left[\frac{1}{2c_m} \vec{H}^{2} (\operatorname{grad}\mu ; \delta\vec{s}) - (\vec{H} ; \delta\vec{s}) \overset{\circ}{q} \right]$$

$$= \int (d^3\vec{K} ; \delta\vec{s})$$

ainsi

$$\left[\; d^3\vec{K} = dv \left(\frac{\vec{H}^{2}}{2 c_m} \operatorname{grad}\mu - \overset{\circ}{q} \vec{H} \right) \right.$$

---

x C'est bien l'expression que trouve de Broglie pour $\mu = 1$ dans Portugaliae Physica, vol 3 (1949) - Fasc. 1, p 1-20 : Energie libre ...; de même E. Durand : Electrostatique et Magnétostatique, Masson édt. p. 704

xx Le lecteur comparera avec le cas électrostatique.

4) Les forces entre aimants et courants stationnaires.

Nous supposerons encore que:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + c_m \vec{M}$$

et nous continuerons de poser:

$$\operatorname{div} \vec{M} = -\overset{\circ}{\rho}$$

Mais considérons les cas où il existe des courants. Nous avons toujours:

$$\underline{\delta} U = \int dV\, \delta\left(\frac{1}{2c_m} \mu^{-1} \vec{B}'^2\right)$$

ce qui donne:

$$\underline{\delta} U = \int dV \left(-\frac{1}{2c_m} \mu^{-2} \delta\mu\, \vec{B}'^2 + \frac{1}{c_m} \mu^{-1} (\vec{B}'; \delta\vec{B}')\right)$$

$$= \int dV \left(\frac{\vec{H}^2}{2c_m} (\operatorname{grad}\mu; \delta\vec{s}) + \frac{1}{c_m} (\vec{H}; \delta\vec{B}')\right)$$

$$= \int dV \left(\frac{\vec{H}^2}{2c_m} (\operatorname{grad}\mu; \delta\vec{s}) + \frac{1}{c_m} (\vec{H}; \delta\vec{B}) - (\vec{H}; \delta\vec{M})\right)$$

Le 1^{ier} terme correspond au travail des forces tenant en équilibre les corps dia ou paramagnétiques; soit

$$d^3\vec{K} = \left(\frac{\vec{H}^2}{2c_m} \operatorname{grad}\mu\right) dV$$

Le $2^{ième}$ terme correspond au travail dû aux forces tenant en équilibre les courants; soit:

$$d^3\vec{K} = -\frac{c_j}{c_m} [\vec{J} \wedge \vec{B}]\, dV$$

plus le travail d'induction:

$$\delta A_{ind} = \frac{c_j}{c_m} \int_{\substack{\text{sur tous} \\ \text{les tubes}}} dJ\, \underline{\delta}\left(\int_S (\vec{B}; d\vec{\sigma})\right)$$

Mais il reste le $3^{ième}$ terme, nous pouvons écrire: ^{x}

---

^{x} $\delta\vec{M} = \operatorname{rot}[\delta\vec{s} \wedge \vec{M}] - (\operatorname{div}\vec{M})\delta\vec{s}$; voir remarque page: 35.

$$\int dV\left(-\vec{H};\delta\vec{M}\right) = \int dV\left(-\vec{H};\ \mathrm{rot}[\delta\vec{s}\wedge\vec{M}] - \mathrm{div}\,\vec{M}\,\delta\vec{s}\right)$$

$$= -\int dV\left(\mathrm{rot}\,\vec{H};\ [\delta\vec{s}\wedge\vec{M}]\right) - \int dV\left(\vec{H};\ \mathring{q}\,\delta\vec{s}\right)$$

$$= -\int dV\left(c_j\vec{j};\ [\delta\vec{s}\wedge\vec{M}]\right) - \int dV\left(\vec{H};\ \mathring{q}\,\delta\vec{s}\right)$$

$$= -\int dV\ \frac{c_j}{c_m}\left(\delta\vec{s};\ [c_m\vec{M}\wedge\vec{j}]\right) - \int dV\left(\delta\vec{s};\ \mathring{q}\,\vec{H}\right)$$

Ainsi la loi de force s'écrit au total :

$$\left[\ d^3\vec{K} = dV\left(\frac{\vec{H}^2}{2c_m}\,\mathrm{grad}\,\mu - \mathring{q}\,\vec{H} - \frac{c_j}{c_m}\left[\vec{j}\wedge(\vec{B}-c_m\vec{M})\right]\right)\right.$$

Cette formule est bien exacte, en effet : Si nous faisons passer un courant à travers un conducteur constitué par un aimant permanent, cet aimant ne subit aucune force en l'absence de champ extérieur dû à d'autres courants où d'autres aimants. x xx

t.S.V.P →

---

x L'énergie mutuelle entre des aimants et des courants est nulle (les courants ne passant pas à travers les aimants)
En effet dans ce cas :

$$\vec{B}' = \vec{B}'_a + \vec{B}_c$$

si $\vec{B}'_a$ est dû aux aimants et $\vec{B}_c$ aux courants ; et nous trouvons :

$$U = \int dV\ \frac{1}{2c_m}\,\mu^{-1}\left(\vec{B}'_a + \vec{B}_c\right)^2$$

$$= \int dV\ \frac{1}{2c_m}\,\mu^{-1}\,\vec{B}'^{\,2}_a + \int dV\,\frac{\mu^{-1}}{2c_m}\,\vec{B}_c^{\,2} + \int dV\,\frac{\mu^{-1}}{c_m}\left(\vec{B}'_a;\vec{B}_c\right)$$

or l'énergie mutuelle est égale à :

$$\int dV\ \frac{1}{c_m}\,\mu^{-1}\left(\vec{B}'_a;\vec{B}_c\right) = \int dV\ \frac{1}{c_m}\left(\vec{H}_a;\vec{B}_c\right)$$

$$= \int dV\ \frac{1}{c_m}\left(-\mathrm{grad}\,\mathring{\varphi}_a;\vec{B}_c\right) = \int dV\,\frac{1}{c_m}\,\mathring{\varphi}_a\,\mathrm{div}\,\vec{B}_c = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

5) La loi de Biot - Savart.

C'est l'analogue de la loi de Coulomb de l'électrostatique.

Nous voulons trouver $\vec{E}$ en fonction de q par l'intermédiaire de ϕ le potentiel scalaire.

Nous avons les équations :

$$\operatorname{div} \vec{D} = c_e q$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \text{const.}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \qquad \text{d'où}$$

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \phi$$

Mais ϕ n'est déterminé qu'à une constante près.

Nous imposerons ϕ nul à l'infini

De ces équations nous déduisons :

$$\Delta \phi = - \frac{c_e}{\varepsilon} q$$

d'où la solution

$$\phi(\vec{y}) = \frac{c_e}{4\pi\varepsilon} \int dV \frac{q(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Si $q(\vec{x})$ est nul en dehors d'une région bornée, la charge

Nous voulons trouver $\vec{B}$ en fonction de $\vec{j}$ par l'intermédiaire de $\vec{A}$ le potentiel vecteur.

Nous avons les équations :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = c_j \vec{j}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad \text{où} \quad \frac{1}{\mu} = \text{const.}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \text{d'où}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Mais $\vec{A}$ n'est déterminé qu'à un gradient près.

Nous imposerons $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ dans tout l'espace.

Ce que nous pouvons faire car si $\operatorname{div} \vec{A}^{x} \neq 0$ par la transformation de jauge :

$$\vec{A} = \vec{A}^{x} + \operatorname{grad} f$$

où :

$$f(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int dV \frac{\operatorname{div} \vec{A}^{x}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Nous retombons sur :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{A}^{x} + \Delta f = 0$$

De ces équations nous déduisons :

$$\Delta \vec{A} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$= - c_j \mu \vec{j}$$

d'où la solution

$$\vec{A}(\vec{y}) = \frac{c_j \mu}{4\pi} \int dV \frac{\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Si les tubes de courants sont fermés, $\vec{j}(\vec{x})$ étant nul en dehors totale de chaque signe étant finie ; alors $\phi = 0$ à l'infini. En effet étant donné $r > 0$ il existe $\vec{y}_r$ tel que :

$|\vec{x} - \vec{y}_r| \geqslant r$ pour tous $\vec{x}$ tel que $q(\vec{x}) \neq 0$

Et nous pouvons écrire :

$$\phi(\vec{y}_r) = \frac{c_e}{4\pi\epsilon}\int dv \, \frac{q(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}_r|}$$

$$\leq \frac{c_e}{4\pi\epsilon}\int dv \, \frac{|q(\vec{x})|}{r} \leq \frac{c_e}{4\pi\epsilon}\,\frac{\overset{+}{Q} + \overset{-}{Q}}{r}$$

c. q. f. d.

d'une région bornée, l'intensité totale étant finie ; alors $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ dans tout l'espace. En effet nous avons alors $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ d'où nous pouvons écrire :

$$\operatorname{div}_{\vec{y}}\vec{A}(\vec{y}) = \frac{c_j\mu}{4\pi}\int dv \left(\operatorname{grad}_{\vec{y}}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \,;\, \vec{j}(\vec{x})\right)$$

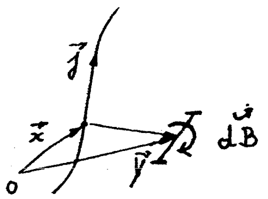
$$= -\frac{c_j\mu}{4\pi}\int dv \left(\operatorname{grad}_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \,;\, \vec{j}(\vec{x})\right)$$

$$= \frac{c_j\mu}{4\pi}\int dv \, \frac{\operatorname{div}_{\vec{x}}\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 0$$

c. q. f. d.

Nous déduisons en suite :

$$\left[\ \vec{B}(\vec{y}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{y}) = \frac{c_j\mu}{4\pi}\int dv \, \frac{[\vec{j} \wedge (\vec{y} - \vec{x})]}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}\right. \quad \times$$



car :

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}) = \varphi \operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}\varphi \wedge \vec{a}]$$

et

$$\operatorname{grad}_{\vec{y}}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = -\frac{\vec{y} - \vec{x}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}$$

× Nous aurions pu ne pas faire usage du potentiel vecteur, en effet : $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ et nous avons :

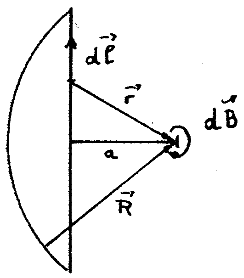
$$\Delta\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = c_j\mu \operatorname{rot}\vec{j} \quad \text{d'où la solution :}$$

$$\vec{B}(\vec{y}) = \frac{c_j\mu}{4\pi}\int dv \, \frac{\operatorname{rot}_{\vec{x}}\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$\vec{j}(\vec{x})$ étant supposé nul en dehors d'une région bornée, nous pouvons intégrer par parties d'où la formule ci-dessus.

Application : Nous nous proposons de calculer le champ $\vec{B}$ dans le cas d'un tube de courant rectiligne infiniment long. Si $\vec{d\ell}$ est un élément infinitésimal du tube ; nous avons :

$$dV\,\vec{J} = \vec{d\ell}\, J \qquad \text{et}$$



$$\left|\frac{dV\,[\vec{J}\wedge\vec{r}]}{r^3}\right| = \begin{cases} \dfrac{d\ell\, J a}{(a^2+\ell^2)^{3/2}} \\[2ex] \dfrac{d\ell\, J}{R^2} \end{cases}$$

d'où

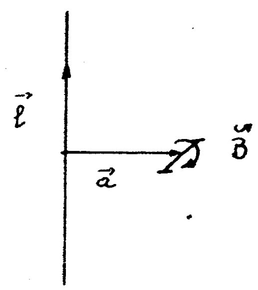
$$|\vec{B}(a)| = \lim_{R\to\infty} \frac{c_j\,\mu}{4\pi}\left(\int_{-\ell}^{+\ell} d\ell\,\frac{Ja}{(a^2+\ell^2)^{3/2}} - \frac{J}{R^2}\,R\,\varphi\right)$$

$$= \frac{c_j\,\mu}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\ell\,\frac{Ja}{(a^2+\ell^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{c_j\,\mu}{4\pi}\,Ja\left|\frac{\ell}{a^2\sqrt{a^2+\ell^2}}\right|_{-\infty}^{+\infty} \qquad \text{d'où}$$

$$\vec{B}(\vec{a}) = \frac{c_j\,\mu}{2\pi}\,\frac{J}{a}\,\vec{V}$$

$$\text{où} \quad \vec{V} = \frac{[\vec{\ell}\wedge\vec{a}]}{|\vec{\ell}|\cdot|\vec{a}|}$$



c'est la formule de Biot et Savart

6) La self-induction et l'induction mutuelle.

C'est l'analogue de la capacité

$$U = \frac{1}{2C_m} \int dv \, (\vec{H} ; \vec{B}) = \frac{1}{2C_m} \int dv \, (\vec{H} ; \operatorname{rot} \vec{A})$$

$$= \frac{1}{2C_m} \int dv \, (\operatorname{rot} \vec{H} ; \vec{A}) = \frac{c_i}{2C_m} \int dv (\vec{j} ; \vec{A})$$

Mais $\vec{A}(\vec{y}) = \frac{c_i \mu}{4\pi} \int dv \frac{\vec{j}(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$ d'où

$$U = \frac{c_i}{2C_m} \cdot \frac{c_i \mu}{4\pi} \iint \frac{(dv \, \vec{j}(\vec{x}) \, ; \, dv \, \vec{j}(\vec{x}))}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

dans le cas de deux tubes de courant

$dv \, \vec{j}_1 = d\vec{l} \, J_1$ et $dv \, \vec{j}_2 = d\vec{l} \, J_2$ ainsi

$$\left[U = \frac{1}{2} \left(L_{11} J_1^2 + 2 L_{12} J_1 J_2 + L_{22} J_2^2 \right) \right.$$

par définition :

L_{ii} est la self induction

$L_{i \neq k}$ est l'induction mutuelle

VIII

Les constantes $\varepsilon_0, \mu_0, c_e, c_j, c_m, c_1, c_2$

1) Les ondes de Maxwell

Nous partirons du principe de conservation de l'énergie et nous supposerons que toutes nos grandeurs sont fonctions du temps mais que la matière est au repos.

Le principe de conservation de l'énergie nous conduit à poser :

$$\dot{U} = d_t U = \int dv\, \dot{u} = -\int (d\vec{\sigma}; \vec{S})$$

où $\vec{S}$ est la densité de courant d'énergie ce que nous appellerons le vecteur de Poynting. De cette expression nous tirons l'équation différentielle :

$$\dot{u} + \operatorname{div} \vec{S} = 0$$

or $u = u_e + u_m$ et

$$\delta u_e = \frac{1}{c_e}(\vec{E}; \delta\vec{D}) \qquad \delta u_m = \frac{1}{c_m}(\breve{H}; \delta\breve{B}) \qquad \text{d'où}$$

$$\dot{u} = \frac{1}{c_e}(\vec{E}; \dot{\vec{D}}) + \frac{1}{c_m}(\breve{H}; \dot{\breve{B}})$$

Considérons la relation :

$$\operatorname{div}[\vec{a} \wedge \breve{b}] = (\breve{b}; \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a}; \operatorname{rot}\breve{b})$$

Nous sommes conduits à poser, pour satisfaire à l'équation de continuité :

$$\mathrm{I} \quad \left[\begin{array}{l} \dot{\vec{D}} = \dfrac{1}{c_2} \operatorname{rot} \breve{H} \\ \dot{\breve{B}} = -\dfrac{1}{c_1} \operatorname{rot} \vec{E} \end{array}\right.$$

Nous avons alors :

$$\dot{u} = \frac{1}{c_e c_2}(\vec{E}; \operatorname{rot}\breve{H}) - \frac{1}{c_m c_1}(\breve{H}; \operatorname{rot}\vec{E}) =$$

$$= -\frac{1}{c_e c_2} \operatorname{div} [\vec{E} \wedge \vec{H}]$$

Si nous posons : $c_e c_2 = c_m c_1$

Ainsi : $\vec{S} = \frac{1}{c_e c_2} [\vec{E} \wedge \vec{H}]$

Ajoutons aux équations I les équations :

$$\text{II} \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$ c'est à dire pas de charge

et considérons le cas linéaire :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

Il vient :

$$c_2 \varepsilon \ddot{\vec{E}} = \operatorname{rot} \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{c_1 \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{c_1 \mu} \Delta \vec{E}$$

car

$$\Delta \vec{a} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}$$

posons

$$\frac{1}{V^2} = \varepsilon \mu c_1 c_2 \quad , \text{ il vient :}$$

$$\left[\frac{1}{V^2} \ddot{\vec{E}} = \Delta \vec{E} \right.$$

c'est une équation d'onde , V est la célérité. (vitesse de Phase)

Cherchons une solution de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}(P, t) \quad \text{où} \quad P = (\vec{\nu} ; \vec{x})$$

$\vec{\nu}$ étant un vecteur unité constant :

La condition :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_i \partial_i E_i = \sum_i \nu_i \partial_P E_i = 0$$

est satisfaite si :

$$\vec{E} = \vec{\Pi} \varphi(P, t)$$

$\vec{\pi}$ étant un vecteur unité perpendiculaire à $\vec{\nu}$

L'équation d'onde se réduit alors à :

$$\frac{1}{V^2}\ddot{\varphi} = \partial_\rho^2 \varphi$$

dont la solution est :

$$\varphi = f(\rho - Vt) + g(\rho + Vt)$$

Considérons le cas où $g \equiv 0$. Nous trouvons :

$$\left[\ \vec{E} = \vec{\pi}\, f\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big)\right.$$

C'est l'équation d'une onde transversale se propageant dans la direction $\vec{\nu}$.

Nous en déduisons :

$$\dot{\vec{B}} = -\frac{1}{C_1}\operatorname{rot}\left(\vec{\pi} f\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big)\right) =$$

$$= -\frac{1}{C_1}\left[\operatorname{grad} f\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big) \wedge \vec{\pi}\right]$$

car :

$$\operatorname{rot}(\vec{a}\varphi) = \varphi \operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}\varphi \wedge \vec{a}]$$

d'où

$$\dot{\vec{B}} = -\frac{1}{C_1}[\vec{\nu}\wedge\vec{\pi}]\, f'\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big)$$

$$= \frac{1}{C_1}\frac{1}{V}[\vec{\nu}\wedge\vec{\pi}]\, \dot{f}\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big)$$

et ainsi nous trouvons :

$$\left[\ \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{1}{C_1 V \mu}[\vec{\nu}\wedge\vec{\pi}]\, f\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big)\right.$$

de plus :

$$u_e = \frac{\varepsilon}{2C_e}\vec{E}^2 = \frac{\varepsilon}{2C_e} f^2\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big) \qquad \text{et}$$

$$u_m = \frac{\mu}{2C_m}\vec{H}^2 = \frac{\mu}{2C_m}\frac{1}{C_1^2\mu^2}\varepsilon\mu C_1 C_2\, f^2\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2C_e} f^2\big((\vec{\nu};\vec{x}) - Vt\big) \qquad \text{car } C_e C_2 = C_m C_1$$

d'où :

$$u = \frac{\varepsilon}{c_e} f^2((\vec{v};\vec{x}) - Vt)$$

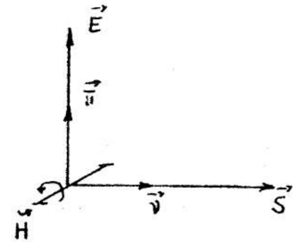
d'autre part :

$$\vec{S} = \frac{1}{c_e c_2} [\vec{E} \wedge \vec{H}]$$

$$= \vec{v} \frac{1}{c_e c_1 c_2 \mu} \frac{1}{V} f^2((\vec{v};\vec{x}) - Vt)$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\vec{S} = \vec{v} V u$$



2) Les équations de Maxwell :

Dans le cas particulier où $\dot{\vec{D}} = 0$ et $\dot{\vec{B}} = 0$ les équations I se réduisent à :

$$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad \text{et} \quad \text{rot}\,\vec{H} = 0$$

Mais nous avions trouvé :

$$\text{rot}\,\vec{H} = c_j \vec{j}$$

Nous sommes ainsi conduits à modifier les équations I et nous poserons :

$$\begin{cases} \text{rot}\,\vec{E} = -c_1 \dot{\vec{B}} \\ \text{rot}\,\vec{H} = c_2 \dot{\vec{D}} + c_j \vec{j} \\ \text{div}\,\vec{B} = 0 \\ \text{div}\,\vec{D} = c_e q \end{cases}$$

Ce sont les équations de Maxwell.
La $1^{ière}$ et la $3^{ième}$ équations sont compatibles ; dès deux autres nous tirons :

$$c_2 c_e \dot{q} + c_j \,\text{div}\,\vec{j} = 0$$

d'où nous déduisons l'équation de continuité.

$$\dot{q} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

en posant :

$$c_j = c_2 c_e = c_m c_1$$

Cherchons ce que devient le théorème d'énergie; nous trouvons :

$$\dot{u} = \frac{1}{c_e}(\vec{E};\dot{\vec{D}}) + \frac{1}{c_m}(\check{H};\dot{\check{B}})$$

$$= -\operatorname{div}\vec{S} - (\vec{E};\vec{j})$$

$$= -\operatorname{div}\vec{S} + p$$

L'équation de continuité suggère de considérer le courant $\vec{j}$ comme provenant du déplacement de charge, ce qui permet d'interpréter le terme : $p = -(\vec{E};\vec{j})$

En effet nous avons alors :

$$\delta t\,\vec{j} = \delta\vec{s}\,q \qquad \text{et}$$

$$\delta U = -\delta t \oint (d\vec{\sigma};\vec{S}) - \int dv(\delta\vec{s};\vec{E}q) \quad {}^{\times}$$

Or $-\int dv(\delta\vec{s};\vec{E}q) = \delta A$ le travail des forces extérieures.

<u>Remarque</u> : Parmis les 5 constantes c_1, c_2, c_j, c_e, c_m 3 sont indépendantes, vu les relations :

$$c_j = c_e c_2 = c_m c_1 \quad {}^{\times\times}$$

Il est commode d'utiliser : c_e, c_j, c_1. Dans le cas du vide nous avons encore deux constantes ε_0 et μ_0 provenant des lois phénoménologiques : $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ et $\check{B} = \mu_0\check{H}$; mais nous devons tenir compte de la relation : $\varepsilon_0\mu_0 c_1 c_2 = \frac{1}{c^2}$ c étant la vitesse de la lumière soit environ $3 \cdot 10^8$ mètre par seconde.

$^{\times}$ $\delta\vec{s}$ est le déplacement, $\vec{S}$ le vecteur de Poynting.

$^{\times\times}$ Ce sont les 3 constantes α, β, γ du cours de Mercier de EPUL

IX
La Loi d'Ohm.

C'est la loi phénoménologique :

$$\left[\; \vec{j} = \varkappa \vec{E}\right.$$

où $\varkappa$ est appelé la conductibilité. Si $\varkappa$ est positif le milieu est dit conducteur. Si $\varkappa$ est nul le milieu est dit isolant.

Considérons un élément de tube de courant de section σ et de longueur l, dans un tel tube supposé cylindrique $\vec{j}$ est parallèle aux génératrices. Supposons le courant $\vec{j}$ constant au cours du temps. D'après la loi d'ohm nous pouvons écrire :

$$J = \int (d\vec{\sigma} ; \vec{j}) = \sigma j$$

$$= \sigma \varkappa E = \sigma \varkappa \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{l}$$

ou encore, en appelant

$$\left[\; R = \frac{l}{\sigma} \cdot \frac{1}{\varkappa}\right.$$

La résistance du conducteur considéré,

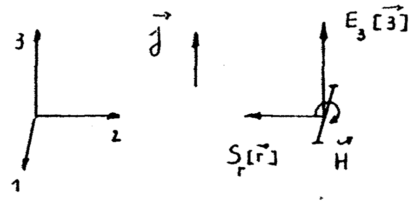
$$\left[\; J = \frac{1}{R} (\phi_1 - \phi_2)\right.$$

D'après la 1ière équation de Maxwell au voisinage extérieur du conducteur nous devons avoir:

$$E_3 = \frac{1}{\varkappa} \frac{J}{\sigma}$$

En supposant dans cette approximation une certaine symétrie, la seconde équation de Maxwell nous permet d'écrire:

$$|2\pi r H_\varphi| = c_j J$$



d'où nous tirons :

$$|\vec{H}| = |H_\varphi| = \frac{c_j}{2\pi r} J$$

Ainsi la composante radiale du vecteur de Poynting

$$S_r = -\frac{1}{c_2 c_e} E_3 |H_\varphi| = -\frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J^2}{\sigma}$$

Donc en un temps δt il pénètre à l'intérieur de l'élément conducteur une énergie égale à :

$$-2\pi r l S_r \delta t = \frac{l}{\pi\sigma} J^2 \delta t = R J^2 \delta t$$

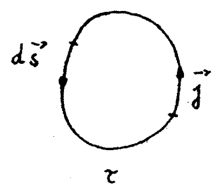
Mais dans un même temps l'élément de tube de courant fournit un travail égal à :

$$-P\delta t = \int dv (\vec{E};\vec{j})\, \delta t$$

ce qui s'écrit :

$$-P\delta t = \sigma l \frac{1}{\pi} \cdot \frac{J}{\sigma} \cdot \frac{J}{\sigma}\, \delta t = R J^2 \delta t$$

Considérons un tube de courant fermé sur lui-même et cherchons s'il existe un régime stationnaire. Dans de telles conditions la 1ière équation de Maxwell nous conduit à écrire:



$$\oint_\tau (\vec{E}; d\vec{s}) = 0$$

d'où nous déduisons

$$\oint_\tau \frac{1}{\pi} (\vec{j}; d\vec{s}) = 0$$

et finalement : $\vec{j} = 0$

" il n'existe donc pas de courant stationnaire ! "

Nous aurions pu employer le théorème d'énergie :

$$\dot{U} = P = 0$$

d'où :

$$\int dv(\vec{E};\vec{j}) = \int dv \frac{1}{\varkappa} \vec{j}^{\,2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \vec{j} = 0$$

Vu l'expérience nous devons généraliser la loi d'Ohm, nous poserons :

$$\left[\quad \vec{j} = \varkappa(\vec{E} + \vec{E}_e)\right.$$

où $\vec{E}_e$ est de la dimension de $\vec{E}$ mais n'obéit pas aux équations de Maxwell. Reprenons le problème, nous trouvons :

$$\oint_{\tau} (\vec{E}; d\vec{s}) = \oint_{\tau} \left(\frac{1}{\varkappa}\vec{j} - \vec{E}_e \; ; d\vec{s}\right) = 0$$

d'où

$$\oint_{\tau} \left(\frac{1}{\varkappa}\vec{j}; d\vec{s}\right) = \oint_{\tau} (\vec{E}_e; d\vec{s})$$

ce qui peut s'écrire :

$$\left[RJ = \phi_e \right. \qquad \text{Loi de Kirchhoff}$$

si nous posons :

$$\left[\quad \phi_e = \oint_{\tau} (\vec{E}_e; d\vec{s})\right.$$

L'intégrale étant parcourue dans le sens du courant (sens fixé à l'avance arbitrairement, si la formule donne une valeur de J positive ce sens est le sens réel du courant).
De même, nous trouvons, à l'aide du théorème d'énergie :

$$P = -\int dv(\vec{j};\vec{E}) = -\int dv\left(\frac{1}{\varkappa}\vec{j}^{\,2} - (\vec{j};\vec{E}_e)\right) = 0$$

$$P = -RJ^2 + \phi_e J = 0 \qquad \text{d'où} \qquad RJ = \phi_e$$

Appendice.

Rappel: [x]

Considérons l'ensemble G_n de toutes les matrices carrées à n lignes et n colonnes et à déterminant non nul.
Soit $R(\alpha)$ une matrice carrée à m lignes et m colonnes dépendant de α telle que:

$$R(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = R(\alpha_1) \cdot R(\alpha_2)$$

$$R(\alpha^{-1}) = R^{-1}(\alpha)$$

pour toute matrice $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in G_n$

Définition: A chaque matrice $R(\alpha)$ correspond un type de tenseur dit du type R défini par m composantes relativement à un repère $\vec{e}_i$, soit $T = \begin{vmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{vmatrix}$ se transformant lors d'un changement de repère défini par $\vec{e}^{\,x}_k = \vec{e}_i \, \alpha^{-1\,i}{}_k$ de la manière suivante:

$$T^x = R(\alpha)\, T$$

Deux types de tenseurs R_1 et R_2 sont dits équivalents s'il existe une matrice S telle que:

$$R_1 = S R_2 S^{-1}$$

Etant donné R_1 et R_2 deux types de tenseurs, par produit tensoriel nous pouvons former un $3^{ième}$ type $R_3 = R_1 \times R_2$ les éléments de la matrice R_3 étant respectivement chacun des produits possibles d'un élément de la matrice R_1 par un élément de la matrice R_2
Etant donné R un type de tenseur, nous pouvons former un nouveau type dit contragradient de R défini par

---

[x] Voir le cours d'Analyse Supérieure de G. de Rham année 1952 - 1953 sur les variétés différentielles.

La matrice $R^{-1'}$ (la transposée de l'inverse de R).
Remarquons que le contragradient du contragradient de R est R lui-même.
Ainsi :

$R(\alpha) = 1$ 1 ligne et 1 colonne, c'est le scalaire
2 tenseurs T_1 et T_2 de type contragradient entre eux forment un scalaire par produit scalaire ; en effet :

$$T_1'^{x}\, T_2^{x} = T_1' R'\, R^{-1'}\, T_2 = T_1' T_2$$

$R(\alpha) = \dfrac{|\alpha|}{\|\alpha\|}$ (c'est à dire le signe du déterminant) 1 ligne et 1 colonne, c'est le scalaire d'espèce impaire (par opposition au précédent dit d'espèce paire)

$R(\alpha) = \alpha$ n lignes et n colonnes, c'est le vecteur (dit contravariant d'espèce paire)

$R(\alpha) = \|\alpha\|$ 1 ligne et 1 colonne, c'est la capacité (d'espèce paire)

En appliquant les deux règles précédentes, nous pouvons former :

$R(\alpha) = \alpha^{-1'}$ n lignes et n colonnes, c'est le covecteur, le contragradient du vecteur (dit covariant d'espèce paire)

$R(\alpha) = \dfrac{1}{\|\alpha\|}$ 1 ligne et 1 colonne, c'est la densité, le contragradient de la capacité (d'espèce paire)

$R(\alpha) = \dfrac{|\alpha|}{\|\alpha\|}\,\alpha$ n lignes et n colonnes, c'est le vecteur d'espèce impaire (dit contravariant et axial par opposition au vecteur d'espèce paire dit polaire)

$R(\alpha) = \dfrac{|\alpha|}{\|\alpha\|}\,\alpha^{-1'}$ n lignes et n colonnes, c'est le covecteur d'espèce impaire, le contragradient du précédent (dit covecteur axial)

$R(\alpha) = \dfrac{\lvert\alpha\rvert}{\lVert\alpha\rVert}\lVert\alpha\rVert = \lvert\alpha\rvert$	1 ligne et 1 colonne, c'est la capacité d'espèce impaire.
$R(\alpha) = \dfrac{\lvert\alpha\rvert}{\lVert\alpha\rVert}\cdot\dfrac{1}{\lVert\alpha\rVert} = \dfrac{1}{\lvert\alpha\rvert}$	1 ligne et 1 colonne, c'est la densité d'espèce impaire, le contragradient du précédent.
$R(\alpha) = \lVert\alpha\rVert\ \alpha$	n lignes et n colonnes, c'est le vecteur capacitif d'espèce paire.
$R(\alpha) = \dfrac{1}{\lVert\alpha\rVert}\ \alpha^{-1'}$	n lignes et n colonnes, c'est le covecteur densitaire d'espèce paire contragradient du précédent.
$R(\alpha) = \lvert\alpha\rvert\ \alpha$	n lignes et n colonnes c'est le vecteur capacitif d'espèce impaire.
$R(\alpha) = \dfrac{\alpha^{-1'}}{\lvert\alpha\rvert}$	n lignes et n colonnes, c'est le covecteur densitaire d'espèce impaire, le contragradient du précédent.
$R(\alpha) = \lVert\alpha\rVert\ \alpha^{-1'}$	n lignes et n colonnes, c'est le covecteur capacitif d'espèce paire.
$R(\alpha) = \dfrac{1}{\lVert\alpha\rVert}\ \alpha$	n lignes et n colonnes, c'est le vecteur densitaire d'espèce paire, le contragradient du précédent.
$R(\alpha) = \lvert\alpha\rvert\ \alpha^{-1'}$	n lignes et n colonnes, c'est le covecteur capacitif d'espèce impaire.
$R(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\lvert\alpha\rvert}$	n lignes et n colonnes, c'est le vecteur densitaire d'espèce impaire, le contragradient du précédent.

Enfin et pour finir, nous pouvons obtenir par la 2ième règle des tenseurs du type (p, q) pair ou impair (p fois covariants q fois contravariants) ...

Exemples dans l'espace à 3 dimensions : x

dx^i est un vecteur d'espèce paire (contravariant polaire)

$$d\vec{M} = \vec{e}_i\, dx^i = \vec{e}_i\, \alpha^{-1\,i}{}_{K}\, dx^{\times K} \qquad \text{d'où} \qquad dx^{\times K} = \alpha^{K}{}_{j}\, dx^{j}$$

c. q. f. d.

Le produit vectoriel de 2 vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est :

x Nous employons ici un repère naturel.

$$t^{ij} = a^i b^j - a^j b^i$$

c'est un tenseur antisymétrique 2 fois contravariants d'espèce paire, nous pouvons le réduire, nous obtenons alors un covecteur capacitif d'espèce impaire.

Multiplié scalairement par un vecteur $\vec{c}$ nous obtenons un produit mixte qui sera une capacité d'espèce impaire, c'est ce que nous obtenons en réduisant le tenseur complètement antisymétrique 3 fois contravariant d'espèce paire défini par:

$$t^{ijk} = \begin{vmatrix} a^i & a^j & a^k \\ b^i & b^j & b^k \\ c^i & c^j & c^k \end{vmatrix}$$

Dans la formule :

$$U = \int dv\, \underline{u}$$

dv est une capacité d'espèce paire, en effet $|\alpha|$ étant le déterminant fonctionnel nous avons bien $dv^* = \|\alpha\|\, dv$

Nous obtenons dv en faisant le produit mixte de 3 vecteurs infinitésimaux et en l'orientant c'est à dire en le multipliant par un scalaire d'espèce impaire valant ± 1.

Dans ce cours nous avons employé la méthode vectorielle, c'est à dire que nous avons choisi une famille de repères orthogonaux, nous avions alors: x

$$d\vec{M} = \vec{e}_i\, \omega^i \qquad \text{et} \qquad ds^2 = \sum_i (\omega^i)^2$$

ω^i étant une forme différentielle linéaire.

---

x Nous avons choisi une famille de courbes triplement orthogonales ; en chaque point le vecteur $\vec{e}_i$ était choisi tangent à la $i^{\text{ème}}$ courbe ($i = 1, 2$ ou 3) et de longueur unité. Dans ce cas nous avons noté $\vec{e}_i$ sous la forme $[\vec{i}]$

Nous n'avons considéré que des transformations orthogonales c'est à dire telles que :

$$\alpha' = \alpha^{-1}, \quad d'où \quad |\alpha| = \pm 1$$

Dans de telles transformations les 18 tenseurs cités précédemment se ramènent à 4 types : Le scalaire d'espèce paire et impaire. Le vecteur polaire et axial, que nous avons noté respectivement : φ $\mathring{\varphi}$ $\vec{A}$ $\overset{\curvearrowright}{A}$

Ainsi d'après les démonstrations précédentes ω^i est un vecteur $\vec{\omega}$, $[\vec{a} \wedge \vec{b}]$ est un vecteur axial $\overset{\curvearrowright}{t}$