THEORIE DE LA GRAVITATION d'EINSTEIN

par C. Piron
Département de physique théorique
CH-1211 Genève 4

CHAPITRE 0

Rappel de mécanique :

Les équations canoniques de la mécanique galiléenne,

$$\dot{p} \ = -\partial_q H$$

$$\dot{q} \ = +\partial_p H$$

peuvent aussi être exprimées en terme de 1-formes par

$$i_X(dp + \partial_q H dt) \ \equiv dp(X) + \partial_q H dt(X) = \ 0$$

$$i_X(dq - \partial_p H dt) \ \equiv dq(X) - \partial_p H dt(X) = \ 0$$

où X est le vecteur tangent à la courbe Γ décrivant le mouvement dans l'espace des états R^7.

Ces équations sont également équivalentes à la condition :

$$i_X \Omega \ = \ 0$$

où Ω est la 2-forme :

$$\Omega \ = \ (dp + \partial_q H dt) \wedge (dq - \partial_p H dt)$$

Or Ω est une 2-forme exacte et avec Cartan nous pouvons écrire :

$$\Omega \ = \ d\omega \quad \text{et} \quad \omega \ = \ pdq - Hdt$$

Il est alors facile de prouver qu'une courbe Γ est un mouvement si et seulement si

$$\int_\Gamma \omega \quad \text{est extrêmale}$$

en effet dans ce cas nous avons bien :

$$\int_{\Gamma+\delta l} \omega \ - \ \int_\Gamma \omega \ = \ \oint_{(\Gamma+\delta l)-\Gamma} \omega \ = \ \int\int d\omega \ = \ 0$$

Le principe de Maupertuis :

Ce principe n'est pas géneral, il suppose l'hamiltonien donné de la forme :

$$H \ = \ \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

Dans ce cas H est une constante du mouvement et au cours du temps, le mouvement reste dans W la sous-varieété $H = E$ fixée par les conditions initiales. La condition d'extrèmalité qui caractérise les courbes Γ de W qui sont des mouvements se réduit à

$$\int_{\Gamma} pdq \quad \text{est extrémale}$$

Nous pouvons alors remplacer la courbe Γ par la donnée d'un chemin γ

$$\gamma \ : \quad t \longmapsto q(t)$$

en imposant en plus les trois conditions

$$p = m\dot{q}$$

qui se déduisent des trois premières équations canoniques.

Un chemin arbitraire γ correspondra bien à une courbe sur W s'il satisfait la condition :

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2 \ + V(q) = E$$

Si l'on se donne l'image de γ c'est-à-dire une route s dans R^3, il suffit alors de paramétrer cette route par

$$t = t_o + \int_{s(t_o)}^{s(t)} [\frac{1}{2}m(E - V(q))^{-1}]^{\frac{1}{2}} ds$$

où $ds = (ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2)^{1/2}$ pour que la condition précedente soit satisfaite et que s puisse se relever sur W.

Ainsi paramétrée chaque route s définit une courbe Γ de W et cette courbe est un mouvement si et seulement si

$$\int_s [2m(E - V(q))]^{\frac{1}{2}} ds \quad \text{est extrêmale}$$

car sous ces conditions

$$\int_{\Gamma} pdq = \int_{\gamma} m\dot{q}dq = \int_s [2m(E - V(q))]^{\frac{1}{2}} ds$$

En d'autres mots la projection sur l'espace des q d'un mouvement d'énergie totale E est une géodésique pour le produit scalaire

$$ds^2 = 2m(E - V(q))(dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2)$$

C'est le principe de Maupertuis.

Le cas relativiste

Pour pouvoir expliciter la covariance dynamique de la mécanique il est utile d'introduire une variable supplémentaire en posant

$$p_\mu \;=\; (-E, p) \quad \text{et} \quad q^\mu \;=\; (t, q)$$

où μ prend les valeurs $0, 1, 2, 3$.

Les équations galiléennes précédentes sont alors équivalentes au système canonique

$$\begin{aligned} \dot{p}_\mu &= -\partial_{q^\mu} K(p_\nu, q^\nu) \\ \dot{q}^\mu &= +\partial_{p_\mu} K(p_\nu, q^\nu) \end{aligned}$$

avec

$$K(p_\nu, q^\nu) \;=\; H(p, q, t) \;-E$$

car le mouvement est encore donné par

$$i_X \Omega = 0$$

où Ω est la restriction à la sous-variété $K(p_\mu, q^\mu) = 0$ de la 2-forme

$$dp_\mu \wedge dq^\mu \;=\; dp \wedge dq \;-\; dE \wedge dt$$

Ainsi sur cette sous-variété Γ est un mouvement si et seulement si

$$\int_\Gamma p_\mu dq^\mu \quad \text{est} \;\; \text{extrêmale}$$

Ce mouvement peut aussi être décrit autrement en introduisant une seconde variables supplémentaire τ, afin de ne pas faire jouer à $q_0 = t$ un rôle privilégié. Les équations canoniques précédentes sont alors équivalentes à celles obtenues à partir de la 1-forme de Cartan :

$$\bar{\omega} = pdq - Edt - Kd\tau$$

K ne dépendant pas explicitement de τ, c'est une constante du mouvement, et en imposant $K = 0$ nous retrouvons les formules précédentes.

Pour pouvoir d'écrire une particule relativiste dans un potentiel scalaire il suffit alors de poser

$$K \;=\; \frac{1}{2m}(g_o^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + m^2 c^2) \;+\; V(q^\mu)$$

où $g_o^{\mu\nu} \;=\; (-\frac{1}{c^2}, 1, 1, 1)$. Les résultats précédents restent valables, en remarquant toute fois que la variable qui paramétrise le mouvement Γ ne peut plus être identifiée à t , car maintenant

$$\dot{t} \;=\; -\partial_E K \;=\; \frac{E}{mc^2}$$

Enfin, dans le cas relativiste le principe de Maupertuis peut être généralisé aux courbes de l'espace-temps. En effet, nous pouvons renplacer la donnée du mouvement Γ par la donnée d'un chemin dans l'espace-temps

$$\gamma \;:\quad \tau \;\longmapsto\; q^\mu(\tau)$$

en imposant conformément aux équations du mouvement

$$p_\mu(\tau) \;=\; m g_{o\mu\nu}\dot{q}^\nu \quad \text{où} \quad g_{o\mu\nu} g_o{}^{\nu\rho} \;=\; \delta_\mu{}^\rho$$

Mais Γ doit être sur la sous-variété $K = 0$ ce qui impose

$$\frac{1}{2}m(g_{o\mu\nu}\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu \;+\; c^2) \;+\; V(q^\mu) \;=\; 0$$

Condition qui est satisfaite si γ est paramètré par

$$\tau \;=\; \tau_o \;+\; \int_{q^\mu(\tau_o)}^{q^\mu(\tau)} [-(\frac{1}{2}mc^2 \;+\; V(q^\mu))^{-1}\frac{1}{2}m g_{o\mu\nu} dq^\mu dq^\nu]^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi la courbe s, image de γ décrit un mouvement si et seulement si

$$\int_s [-2m(\frac{1}{2}mc^2 \;+\; V(q^\mu)) g_{o\mu\nu} dq^\mu dq^\nu]^{\frac{1}{2}} \quad \text{est extrémale}$$

En d'autres termes la projection sur l'espace-temps d'un mouvement est une géodésiques du genre temps pour la métrique

$$ds^2 \;=\; -2m(\frac{1}{2}mc^2 \;+\; V(q^\rho)) g_{o\mu\nu} dq^\mu dq^\nu$$

et donc ici aussi la dynamique peut s'exprimer par la géométrie, d'où l'importance d'étudier les connexions sur les variétés.

CHAPITRE 1

Variétés différentielles

L'exemple type est l'espace des états Σ où les observables f sont réalisées par des fonctions de Σ dans R. La donnée d'une algèbre $\mathcal{D}$ de fonctions sur Σ fermée pour la composition avec les fonctions h de R^n dans R qui sont C^∞ induit par définition une structure différentielle C^∞ sur Σ :

Si f_1 et $f_2 \in \mathcal{D}$ alors les fonctions :

$$f_1 f_2 \ : \ P \longmapsto f_1(P) f_2(P) \quad \in \mathcal{D}$$

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \ : \ P \longmapsto \lambda_1 f_1(P) \ + \ \lambda_2 f_2(P) \quad \in \mathcal{D}$$

si $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{D}$ et $h : R^n \to R$ est C^∞ alors

$$h \circ (f_1, \cdots, f_n) \ : \ P \longmapsto h(f_1(P), \cdots, f_n(P)) \quad \in \mathcal{D}$$

.

Cartes locales :

Une carte locale en $P \in \Sigma$ est l'existence d'un n-tuple de fonctions $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{D}$ tel que μ l'application de Σ dans R^n définie par

$$Q \longmapsto (f_1(Q), \cdots, f_n(Q))$$

est C^∞-inversible localement en P, c'est-à-dire que localement en $\mu(P)$, μ^{-1} existe et $f \circ \mu^{-1}$ est localement C^∞ pour tout $f \in \mathcal{D}$.

Si une telle carte existe, le point P est dit régulier d'ordre n. La variété Σ est régulière d'ordre n si chaque point $P \in \Sigma$ est de ce type. Dans la suite nous ne considérerons en principe que des varietés régulières .

Un chemin en P est une application C de $[-1, 1]$ dans Σ telle que :

$$C(0) = P \quad \text{et} \quad f \circ C \quad \text{est} \quad C^\infty \text{ pour tout } f \in \mathcal{D}$$

Deux chemins sont dits équivalents s'ils ont même restriction sur un voisinage donné de 0. Les classes d'équivalence de chemins en P sont par définition les vecteurs tangents en P. L'ensemble des vecteurs tangents en P est l'espace tangent en P.

Connexions affines

Pour chaque P définissons sur l'espace tangent correspondant la structure affine canonique associée à la structure vectorielle et donnons nous un groupe G défini par son action affine. Pour chaque espace tangent en P définissons un repère $\vec{e}_\mu$, choisi bien adapté à l'action du groupe (c'est la méthode du repère mobile de E. Cartan). Soit P' un point voisin de P et $\vec{e}_\mu{}'$ le repère choisi de l'espace tangent en P'. Se donner une connexion, c'est se donner dans l'espace affine tangent en P un autre repère $\vec{e}_\mu{}''$ d'origine P'', dit repère image de $\vec{e}_\mu{}'$, qui diffère du repère $\vec{e}_\mu$ au point P par une transformation affine infinitésimale de G :

$$P'' - P \;\equiv\; dP \;=\; \omega^\nu \vec{e}_\nu$$

$$\vec{e}_\mu{}'' - \vec{e}_\mu \equiv\; d\vec{e}_\mu \;=\; \omega_\mu{}^\nu \vec{e}_\nu$$

où les ω^ν et les $\omega_\mu{}^\nu$ sont des 1-formes différentielles définies sur la variété.

Les 1-formes ω^ν doivent être linéairement indépendantes de manière à définir un germe de carte, et les $\omega_\mu{}^\nu$ doivent refléter la structure du groupe. Ainsi nous définirons les types suivants :

1) Les connexions Euclidiennes :

G est le groupe Euclidien, les repères sont choisis orthonormés

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \;=\; \delta_{\mu\nu}$$

ce qui impose les conditions de compatibilités

$$\omega_\mu{}^\nu \;+\; \omega_\nu{}^\mu \;=\; 0$$

2) Les connexions Galiléennes :

G est le groupe de Galilée inhomogène, les repères sont des repères de Galilée :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

ce qui impose les conditions

$$\omega_i{}^j \;+\; \omega_j{}^i \;= 0 \quad , \quad \omega_i{}^o \;= 0 \;\text{ et }\; \omega_o{}^o = 0$$

3) Les connexions Lorentziennes :

G est le groupe de Poincaré, les repères sont des repères de Lorentz :

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \;=\; g_{o\mu\nu}$$

ce qui impose les conditions de compatibilité

$$\omega_\mu{}^\nu g_{o\nu\lambda} \;+\; \omega_\lambda{}^\nu g_{o\nu\mu} \;=\; 0$$

C'est-à-dire,

$$\omega_i{}^j + \omega_j{}^i = 0 \quad \text{et} \quad \omega_i{}^t = \frac{1}{c^2}\omega_t{}^i$$

La donnée d'une connexion permet de comparer un objet défini en P dans le repère $\vec{e}_\mu$ avec un objet du même type défini en P' dans le repère $\vec{e}_\mu\,'$. Il suffit de convenir que cet objet a dans $\vec{e}_\mu\,''$ les mêmes composantes que dans $\vec{e}_\mu\,'$ et de transformer celles-ci par la matrice R correspondant au passage de $\vec{e}_\mu\,''$ à $\vec{e}_\mu$. Ayant ainsi tout ramené à un même repère on peut, par exemple, définir la différentielle. Dans ce cas le résultat final obtenu ainsi est appelé la différentielle absolue ou encore la différentielle covariante. En remarquant que le passage de $\vec{e}_\mu\,''$ à $\vec{e}_\mu$ correspond à la transformation :

$$\alpha_\mu{}^\nu \;=\; \delta_\mu{}^\nu \;-\omega_\mu{}^\nu$$

nous trouvons :

Pour le vecteur covariant ($R = \alpha$) :

$$Dp_\mu \;=\; dp_\mu \;-\omega_\mu{}^\nu p_\nu$$

Pour le vecteur contravariant ($R = \alpha^{-1}$) :

$$Dq^\mu \;=\; dq^\mu \;+q^\nu \omega_\nu{}^\mu$$

Pour la densité paire ($R = \|\alpha\|$) :

$$D\rho \;=\; d\rho \;-\; \omega_\mu{}^\mu$$

Les p-formes ordinaires étant des scalaires leur différentielle extérieure absolue n'est autre que la différentielle extérieure ordinaire. Pour les p-formes à valeurs contravariantes nous obtenons :

$$Df^\mu \;=\; df^\mu \;+(-1)^p f^\nu \wedge \omega_\nu{}^\mu$$

<u>Torsions et courbures</u> :

Ayant défini une connexion nous pouvons de proche en proche ramener l'espace tangent de n'importe quel point Q sur l'espace tangent d'un point donné P. Le résultat obtenu ainsi dépend du chemin de P à Q choisi sur la variété. Pour mettre en évidence ce fait nous allons considérer P et Q infiniment près et deux chemins infiniment petits allant de P à Q. Dans une même carte ces deux chemins seront définis ainsi : Le premier va de x^i à $x^i + \;\delta_1 x^i$ et ensuite de $x^i + \;\delta_1 x^i$ à $\;x^i + \;\delta_1 x^i + \;\delta_2 x^i$. Le deuxième va de x^i à $\;x^i + \;\delta_2 x^i$ et ensuite de $x^i + \;\delta_2 x^i$ à $\;x^i + \;\delta_1 x^i + \;\delta_2 x^i$

Ainsi dans l'espace tangent en P, en suivant le premier chemin le point Q est repéré en

$$\omega^\mu(x^i)(\delta_1 x^i)\vec{e}_\mu \;+\omega^\mu(x^i + \;\delta_1 x^i)(\delta_2 x^i)[\vec{e}_\mu \;+\omega_\mu{}^\nu(x^i)(\delta_1 x^i)\vec{e}_\nu]$$

alors qu'en suivant le deuxième chemin ce même point est repéré en

$$\omega^\mu(x^i)(\delta_2 x^i)\vec{e}_\mu \;+\omega^\mu(x^i + \;\delta_2 x^i)(\delta_1 x^i)[\vec{e}_\mu \;+\omega_\mu{}^\nu(x^i)(\delta_2 x^i)\vec{e}_\nu]$$

La différence est alors donnée par

$$[d\omega^\mu(x^i)(\delta_1 x^i, \delta_2 x^i) + \omega^\nu \wedge {\omega_\nu}^\mu(x^i)(\delta_2 x^i, \delta_1 x^i)]\vec{e}_\mu$$

La 2-forme à valeur vectorielle :

$$\Omega^\mu \;=\; d\omega^\mu \; - \omega^\nu \wedge {\omega_\nu}^\mu$$

est appelée la <u>torsion</u>.

De même le vecteur $\vec{e}_\mu$ en Q est repéré en suivant le premier chemin par

$$\vec{e}_\mu \; + {\omega_\mu}^\nu(x^i)(\delta_1 x^i)\vec{e}_\nu \; + {\omega_\mu}^\nu(x^i \; + \; \delta_1 x^i)(\delta_2 x^i)[\vec{e}_\nu \; + {\omega_\nu}^\rho(x^i)(\delta_1 x^i)\vec{e}_\rho]$$

et en suivant le deuxième par :

$$\vec{e}_\mu \; + {\omega_\mu}^\nu(x^i)(\delta_2 x^i)\vec{e}_\nu \; + {\omega_\mu}^\nu(x^i \; + \; \delta_2 x^i)(\delta_1 x^i)[\vec{e}_\nu \; + {\omega_\nu}^\rho(x^i)(\delta_2 x^i)\vec{e}_\rho]$$

La différence est alors dans ce cas :

$$[d{\omega_\mu}^\nu(x^i)(\delta_1 x^i \;, \delta_2 x^i) \; + {\omega_\mu}^\rho \wedge {\omega_\rho}^\nu(x^i)(\delta_2 x^i \;, \delta_1 x^i)]\vec{e}_\nu$$

La 2-forme à valeur tensorielle

$$\Omega_\mu{}^\nu \;=\; d{\omega_\mu}^\nu \; - {\omega_\mu}^\rho \wedge {\omega_\rho}^\nu$$

est appelée la <u>courbure</u>.

<u>Les identités de Bianchi</u> :

Les 2-formes Ω^μ et $\Omega_\mu{}^\nu$ satisfont des identités remarquables obtenues par dérivation extérieure. En effet nous trouvons :

$$d\Omega^\mu \; = -d\omega^\nu \wedge {\omega_\nu}^\mu \; + \omega^\nu \wedge d{\omega_\nu}^\mu$$

$$= -\Omega^\nu \wedge {\omega_\nu}^\mu \; + \omega^\nu \wedge \Omega_\nu{}^\mu$$

et

$$d\Omega_\mu{}^\nu \; = -d{\omega_\mu}^\rho \wedge {\omega_\rho}^\nu \; + {\omega_\mu}^\rho \wedge d{\omega_\rho}^\nu$$
$$= -\Omega_\mu{}^\rho \wedge {\omega_\rho}^\nu \; + {\omega_\mu}^\rho \wedge \Omega_\rho{}^\nu$$

<u>Un théorème de H. Weyl</u> :

Par hypothèse les ω^μ sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base pour les formes et nous pouvons poser

$$\omega_\mu{}^\nu \; = \Gamma_\mu{}^\nu{}_\rho \, \omega^\rho$$

$$\Omega^\mu = T_\nu{}^\mu{}_\rho\, \omega^\nu \wedge \omega^\rho$$

$$\Omega_\mu{}^\nu = R_{\lambda\mu}{}^\nu{}_\rho \omega^\lambda \wedge \omega^\rho$$

Ces notations rappellent les notations habituelles aux physiciens, où nous aurions posé, associé à chaque carte locale, $\omega^\mu = dx^\mu$, ce qui n'est manifestement pas un choix intrinsèque à la variété.

Si la connexion est compatible avec une métrique $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = g_{\mu\nu}$, ce qui est le cas pour une connexion euclidienne ou lorentzienne, elle est alors entièrement déterminée par la donnée de ω^μ et Ω^μ. C'est le théorème de H. Weyl.

Démonstration :

Remarquons tout d'abord que la compatibilité avec la métrique entraine

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0 \quad \text{et} \quad \Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0$$

où conformément aux jeux habituels des indices, nous avons posé

$$\omega_{\mu\nu} \equiv \omega_\mu{}^\rho g_{\rho\nu} \quad \text{etc.}$$

Définissons alors

$$\Omega^\mu - d\omega^\mu \equiv -\lambda_\rho{}^\mu{}_\nu\, \omega^\rho \wedge \omega^\nu$$

la compatibilité avec la métrique impose

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\mu\rho} = 0$$

mais vu la définition des facteurs $\lambda_\rho{}^\mu{}_\nu$ nous avons aussi

$$\lambda_{\rho\mu\nu} + \lambda_{\nu\mu\rho} = 0$$

De l'expression de la torsion il vient

$$-\omega^\mu \wedge \omega_{\mu\nu} = \Omega_\nu - d\omega_\nu$$

d'où les relations

$$-\Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\rho\nu\mu} = -2\lambda_{\mu\nu\rho}$$

$$-\Gamma_{\nu\rho\mu} + \Gamma_{\mu\rho\nu} = -2\lambda_{\nu\rho\mu}$$

$$-\Gamma_{\rho\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\rho} = -2\lambda_{\rho\mu\nu}$$

et ainsi

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \lambda_{\mu\nu\rho} - \lambda_{\nu\rho\mu} + \lambda_{\rho\mu\nu}$$

ce qui achève la démonstration.

Cette formule, dite formule de Weyl, permet de calculer la connexion $\omega_\mu{}^\nu$ étant donné les ω^μ et les Ω^μ. Ce n'est pas la formule connue des physiciens, que nous allons établir maintenant et qui se rapporte au cas particulier d'une connexion métrique sans torsion ou comme on dit aussi une connexion riemannienne.

Le physicien se donne comme vecteurs tangents les lignes de coordonnées. Il peut alors poser $\omega^\mu = dx^\mu$, et se donner la métrique $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \ = g_{\mu\nu}(P)$. La condition de comptabilité s'écrit alors

$$d\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu \ + \vec{e}_\mu \cdot d\vec{e}_\nu \ = dg_{\mu\nu}$$

ce qui entraîne

$$\omega_{\mu\nu} \ + \omega_{\nu\mu} \ = \partial_\rho g_{\mu\nu} \omega^\rho$$

ou encore

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} \ + \Gamma_{\nu\mu\rho} \ = \partial_\rho g_{\mu\nu}$$

De plus, $d\omega^\mu$ étant nule, en l'absence de torsion

$$\lambda_\mu{}^\nu{}_\rho = 0$$

Ainsi

$$-\Gamma_{\mu\nu\rho} \ + \Gamma_{\rho\nu\mu} \ = 0$$

et

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} \ = \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\nu} \ - \partial_\nu g_{\rho\mu} \ + \partial_\mu g_{\nu\rho})$$

qui est la formule cherchée. Ces $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ sont appelés les symboles de Christoffel, ce ne sont pas des tenseurs car le choix fait pour définir les ω^μ les fait dépendre directement des coordonnées or les transformations de coordonnées ne sont pas nècessairement linéaires. Exemples :

1) Selon le principe de Maupertuis galiléen que nous avons démontré, dans le cas du potentiel de gravitation $V(\vec{q}) = gz$, le mouvement d'une particule dans le plan x, z est une géodésique pour la métrique

$$ds^2 \ = \ (E - z)(dx^2 \ + dz^2) \quad \text{avec} \quad 2\text{m} = \text{g} = 1$$

Ainsi nous sommes conduit à poser :

$$\omega^x \ = \ (E - z)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\omega^z \ = \ (E - z)^{\frac{1}{2}} dz$$

d'où

$$\begin{aligned} d\omega^x \ &= \frac{1}{2}(E - z)^{-\frac{1}{2}} \ dx \wedge dz \\ &= \frac{1}{2}(E - z)^{-\frac{3}{2}} \ \omega^x \ \wedge \omega^z \\ d\omega^z \ &= \ 0 \end{aligned}$$

et si nous supposons la torsion nulle

$$\lambda_x{}^x{}_z = -\lambda_z{}^x{}_x = (E-z)^{-\frac{3}{2}}$$

tous les autres termes étant nuls. Ainsi finalement

$$\omega_x{}^z = -\omega_z{}^x = (E-z)^{-1}dx = (E-z)^{-\frac{3}{2}}\omega^x$$

et

$$\Omega_x{}^z = -\Omega_z{}^x = -(E-z)^{-2}dx \wedge dz = -(E-z)^{-3}\omega^x \wedge \omega^z$$

On remarquera que pour $z = E$ la courbure devient infinie, c'est une ligne singulière, c'est l'altitude maximale que peut atteindre la particule d'énergie E.

2) Dans l'espace-temps galiléen, supposons donné un champ de forces $F^i\vec{e}_i$, et considerons la connexion (galiléenne)

$$dP = dt\vec{e}_o + dx^i\vec{e}_i$$

c'est-à-dire

$$\omega^o = dt \qquad \omega^i = dx^i$$

et

$$d\vec{e}_o = -\frac{F^i}{m}\, dt\vec{e}_i \qquad d\vec{e}_i = 0$$

c'est-à-dire

$$\omega_o{}^i = -\frac{F^i}{m}\, dt \qquad \omega_i{}^j = 0$$

où m est la masse de la particule.

Les composantes contravariantes du vecteur

$$\dot{x}^\mu\vec{e}_\mu = \vec{e}_o + \dot{x}^i\vec{e}_i$$

ont alors pour différentielles covariantes

$$D\dot{x}^\mu = d\dot{x}^\mu + \dot{x}^\nu\omega_\nu{}^\mu$$

ou encore

$$D\dot{x}^i = d\dot{x}^i - \frac{F^i}{m}dt$$

Ainsi les équations de Newton

$$m\ddot{x}^i = F^i$$

sont équivalentes à

$$D\dot{x}^\mu = 0$$

qui est par définition l'équation d'une droite, l'équivalent d'une géodésique dans un espace non-métrique.

En conclusion, à chaque champs de forces galiléen est associée une connexion galiléenne telle que les mouvements satisfaisant les équations de Newton soient des droites. C'est une connexion à torsion nulle car

$$\Omega^o \ = d\omega^o \ = \ 0$$

et

$$\Omega^i \ = d\omega^i \ + \omega^o \wedge {\omega_o}^i \ = dt \wedge (-\frac{F^i}{m} \ dt) = \ 0$$

Sa courbure est donnée par

$${\Omega_o}^i \ = d{\omega_o}^i \ - {\omega_o}^k \wedge {\omega_k}^i \ = -\frac{1}{m} \ \partial_k F^i \ dx^k \wedge dt$$

et

$${\Omega_i}^j \ = d{\omega_i}^j \ = \ 0 \qquad {\Omega_i}^o \ = \ 0$$

Ainsi, sur l'espace , sur l'hypersurface t =constante, la courbure est identiquement nule et c'est seulement pour les éléments de surface du genre temps que ce tenseur est non nul.

Ainsi il doit être possible de traduire la théorie de Newton de la gravitation en termes purement géométriques.

CHAPITRE 2

La théorie de la gravitation de Newton

Nous allons maintenant montrer qu'il est effectivement possible d'exprimer la théorie de la gravitation de Newton sous forme purement géométrique. Vu l'exemple final du chapitre précédent nous sommes conduit à choisir une connexion galiléenne telle que

1) La torsion soit nulle.

2) La courbure du genre espace soit nulle.

D'autre part l'existence d'un potentiel V tel que

$$F_i \ = -\partial_i V$$

impose la condition $\partial_i F_j - \partial_j F_i = 0$, condition qui peut s'exprimer ainsi

3) $$\omega_i \wedge {\Omega_o}^i \ = \ dx^i \wedge (-\partial_j \frac{F_i}{m}) \wedge dx^j \wedge dt \ = 0$$

Enfin l'équation de Newton sur le potentiel

$$\Delta V = -f\rho$$

où ρ est la densité de masse gravitationnelle, se traduit par la condition

4) $$\sum_{(ijk)} \omega^i \wedge \omega^j \wedge {\Omega_o}^k \ = f\rho \, \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^o$$

où $\sum_{(ijk)}$ signifie qu'il faut sommer cycliquement sur les indices i, j, k.

En effet le calcul montre que

$$\sum_{(ijk)} \omega^i \wedge \omega^j \wedge {\Omega_o}^k \ = -\frac{1}{m}(\partial_1 F^1 \ + \partial_2 F^2 \ + \partial_3 F^3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dt$$

$$= -\Delta V \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^o$$

Ces quatres conditions ont un caractère intrinsèque, si en chaque point P nous choisissons une autre base $\vec{e}_\mu$, mais la même connexion affine c'est-à-dire, la même application de l'espace tangent en P' sur l'espace tangent en P, les expressions 1) à 4) gardent la même forme.

Pour la condition 1) c'est évident.

Pour la condition 2) cela résulte du caractère invariant de la forme $\omega^o = dt$ sous l'action du groupe de Galilée. Les directions du genre espace sont alors celles qui annulent dt.

Pour la condition 3) c'est a priori moins évident car ω^i se transforme en $\omega^i + v^i\omega^o$ sous une transformation de galilée pure. Mais le terme en plus, du type

$$\omega^o \wedge \Omega_o{}^i$$

est toujours nul en vertu de la première identité de Bianchi qui, compte tenu de 1) et 2), se réduit à

$$0 = \omega^o \wedge \Omega_o{}^i$$

Enfin pour la condition 4) c'est évident.

Réciproquement ces conditions déterminent complètement le champ de Newton. En effet si $\Omega^o = 0$ alors $d\omega^o = 0$ car $\omega_i{}^o$ est toujours nul dans une connexion galiléenne. Nous pouvons donc poser $\omega^o = dt$. Si de plus, sur les hypersurfaces du genre espace définies par $t = t_0$, la courbure est nulle, nous pouvons imposer $\omega_i{}^j = 0$ d'où $\Omega^i = d\omega^i = 0$ et $\omega^i = dx^i$.

Sur l'espace entier la condition 1) devient

$$\Omega^i = \omega^o \wedge \omega_o{}^i = dt \wedge \omega_o{}^i = 0$$

Ainsi $\omega_o{}^i$ est nécessairement de la forme

$$\omega_o{}^i = -F^i(\vec{x}, t)dt$$

et, en vertu de ce qui précède, le reste du calcul est trivial.

La théorie de la gravitation d'Einstein

Pour obtenir une dynamique relativiste covariante, il nous faut imposer une connexion lorentzienne. Examinnons alors comment modifier les quatre conditions de la théorie de Newton.

1) Nous imposerons aussi à la torsion d'être nulle, comme dans Newton.

2) La condition sur la courbure de l' espace ne sera pas maintenue car les surfaces $t = t_0$ ne sont plus définies d'une manière intrinsèque.

3) Cette condition est automatiquement satisfaite. Car les premières identités de Bianchi

$$d\Omega^\mu \ = -\Omega^\nu \wedge {\omega_\nu}^\mu \ + \omega^\nu \wedge {\Omega_\nu}^\mu$$

entraînent les quatre conditions

$$0 = \omega^\nu \wedge {\Omega_\nu}^\mu$$

et donc en particulier

$$\omega^i \wedge {\Omega_i}^o \ = 0 \ \text{ ou encore } \ \omega_i \wedge {\Omega_o}^i \ = 0$$

4) Ecrite ainsi la dernière condition n'est pas intrinsèque, mais nous pouvons la remplacer par une condition équivalente qui elle est intinsèque

$$\sum_{(1230)} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} \ = -\frac{f}{c^2}\rho \ \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_0$$

Or curieusement, la théorie d'Einstein impose une condition plus forte

$$\sum_{(\mu\nu\rho)} \omega_\mu \wedge \Omega_{\nu\rho} \quad = -\frac{f}{c^2}\pi^\lambda$$

c'est la fameuse équation d'Einstein où π^λ est le tenseur matière impulsion-énergie qui est tel que

$$\omega_\lambda \wedge \pi^\lambda \ = \rho \ \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_0$$

CHAPITRE 3

La solution de Schwarzschild

La solution de Schwarzschild est le correspondant de la solution $\frac{1}{r}$ de Newton obtenue en supposant une symétrie sphérique et la densité de masse nulle partout sauf au voisinage de l'origine.

Supposons donc un produit scalaire statique, à symétrie sphérique, de la forme

$$ds^2 = e^2(q)dq^2 + q^2 d\theta^2 + q^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - h^2(q)dt^2$$

et déterminons $e(q)$ et $h(q)$ en imposant les équations d'Einstein correspondant à un tenseur d'énergie-impulsion de matière nul partout sauf au voisinage du centre (l'axe du temps). Pour réaliser une connexion lorentzienne nous sommes conduit à poser

$$ds^2 = (\omega^q)^2 + (\omega^\theta)^2 + (\omega^\varphi)^2 - (\omega^t)^2$$

avec

$$\omega^q = e(q)dq\ ,\ \omega^\theta = qd\theta\ ,\ \omega^\varphi = q\sin\theta d\varphi\ ,\ \omega^t = h(q)dt$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned}
d\omega^q &= 0\\
d\omega^\theta &= dq\wedge d\theta\\
d\omega^\varphi &= \sin\theta dq\wedge d\varphi + q\cos\theta d\theta\wedge d\varphi\\
d\omega^t &= h'(q)dq\wedge dt
\end{aligned}$$

La torsion devant être nulle, les facteurs $\lambda_\rho{}^\mu{}_\nu$ sont déterminés par les relations

$$d\omega^\mu = \lambda_\rho{}^\mu{}_\nu \omega^\rho\wedge\omega^\nu$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lambda_q{}^\theta{}_\theta &= -\lambda_\theta{}^\theta{}_q = \frac{1}{2}(e(q)q)^{-1}\\
\lambda_q{}^\varphi{}_\varphi &= -\lambda_\varphi{}^\varphi{}_q = \frac{1}{2}(e(q)q)^{-1}\\
\lambda_\theta{}^\varphi{}_\varphi &= -\lambda_\varphi{}^\varphi{}_\theta = \frac{1}{2}(q\sin\theta)^{-1}\cos\theta\\
\lambda_q{}^t{}_t &= -\lambda_t{}^t{}_q = \frac{1}{2}(h(q)e(q))^{-1}h'(q)
\end{aligned}$$

tous les autres facteurs étant nuls.

Pour appliquer la formule de Weyl il est important de remarquer que les facteurs $\lambda_\rho{}^\mu{}_\nu$ différents de zéro ont toujours deux indices égaux, car il suffit alors de calculer

$$\Gamma_{\mu\nu\nu} = \lambda_{\mu\nu\nu} - \lambda_{\nu\nu\mu} + \lambda_{\nu\mu\nu} = 2\lambda_{\mu\nu\nu}$$

$$\Gamma_{\nu\mu\nu} = \lambda_{\nu\mu\nu} - \lambda_{\mu\nu\nu} + \lambda_{\nu\nu\mu} = -\Gamma_{\mu\nu\nu}$$
$$\Gamma_{\nu\nu\mu} = \lambda_{\nu\nu\mu} - \lambda_{\nu\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu\nu} = 0$$

Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned}
\omega_q{}^\theta &= \Gamma_q{}^\theta{}_\theta \omega^\theta = (e(q)q)^{-1} q d\theta = e(q)^{-1} d\theta \\
\omega_q{}^\varphi &= \Gamma_q{}^\varphi{}_\varphi \omega^\varphi = (e(q)q)^{-1} q \sin\theta d\varphi = e(q)^{-1} \sin\theta d\varphi \\
\omega_q{}^t &= \Gamma_q{}^t{}_t \omega^t = (h(q)e(q))^{-1} h'(q) h(q) dt = e(q)^{-1} h'(q) dt \\
\omega_\theta{}^\varphi &= \Gamma_\theta{}^\varphi{}_\varphi \omega^\varphi = (q\sin\theta)^{-1} \cos\theta q \sin\theta d\varphi = \cos\theta d\varphi
\end{aligned}$$

$$\omega_\varphi{}^t = \omega_\theta{}^t = 0$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}
\Omega_q{}^\theta &= (e(q)^{-1})' dq \wedge d\theta \\
\Omega_q{}^\varphi &= \sin\theta (e(q)^{-1})' dq \wedge d\varphi \\
\Omega_q{}^t &= (h'(q)e(q)^{-1})' dq \wedge dt \\
\Omega_\theta{}^\varphi &= (e(q)^{-2} - 1) \sin\theta d\theta \wedge d\varphi \\
\Omega_\theta{}^t &= e(q)^{-2} h'(q) d\theta \wedge dt \\
\Omega_\varphi{}^t &= e(q)^{-2} h'(q) \sin\theta d\varphi \wedge dt
\end{aligned}$$

Ainsi les équations d'Einstein du vide, en l'absence d'énergie-impulsion

$$\sum_{(\mu\nu\rho)} \omega_\mu \wedge \Omega_{\nu\rho} = 0$$

imposent les quatre équations suivantes :

1) $$\omega_q \wedge \Omega_{\theta\varphi} + \omega_\theta \wedge \Omega_{\varphi q} + \omega_\varphi \wedge \Omega_{q\theta} = 0$$

qui s'écrit, en divisant par $\sin\theta$,

$$e(q)(e(q)^{-2} - 1) + 2q(e(q)^{-1})' = 0$$

2) $$\omega_t \wedge \Omega_{q\theta} + \omega_q \wedge \Omega_{\theta t} + \omega_\theta \wedge \Omega_{tq} = 0$$

ou encore

$$h(q)(e(q)^{-1})' + e(q)^{-1} h'(q) + q(h'(q)e(q)^{-1})' = 0$$

3) $$\omega_\theta \wedge \Omega_{\varphi t} + \omega_\varphi \wedge \Omega_{t\theta} + \omega_t \wedge \Omega_{\theta\varphi} = 0$$

ou encore en divisant par $\sin\theta$,

$$2qe(q)^{-2}h'(q) + h(q)(e(q)^{-2} - 1) = 0$$

4) $$\omega_\varphi \wedge \Omega_{tq} + \omega_t \wedge \Omega_{q\varphi} + \omega_q \wedge \Omega_{\varphi t} = 0$$

ou encore toujours en divisant par $\sin\theta$,

$$q(h'(q)e(q)^{-1})' + h(q)(e(q)^{-1})' + e(q)^{-1}h'(q) = 0$$

Cette dernière équation n'impose rien de plus, elle est identique à 2).

En posant dans la première équation $e(q)^{-2} = a(q)$, elle s'écrit

$$a(q) - 1 + qa'(q) \ = 0$$

d'où la solution

$$a(q) = 1 - \frac{\alpha}{q}$$

où α est une constante. Il est facile de résoudre l'équation 3) car elle se ramène à l'équation 1) en posant

$$h(q) = e(q)^{-1}$$

Il reste alors à vérifier que l'équation 2) est satisfaite. Or en éliminant $h(q)$ l'équation 2) s'écrit

$$(e(q)^{-2})' + \frac{1}{2}q(e(q)^{-2})'' = 0$$

ce qui est bien satisfait par la solution trouvée plus haut. La solution trouvée est valable sur la variété R^4 restreinte à $q \geq \alpha$, les points pour $q = \alpha$ ne sont donc pas des points réguliers.

En résumé, nous avons trouvé

$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{q}}dq^2 + q^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2(1-\frac{\alpha}{q})dt^2$$

C'est la solution de Schwarzschild.

<u>Le mouvement des planètes</u>

L'expression du ds^2 de Schwarzschild, dans les variables données ci-dessus, est sans doute la plus simple pour les calculs précédents, mais ce n'est pas toujours le cas pour pour les applications. Considérons une nouvelle variable r définie par

$$r = \frac{1}{2}[q - \frac{1}{2}\alpha + (q^2 - \alpha q)^{\frac{1}{2}}]$$

ou encore, en inversant, par

$$q = r(1 + \frac{\alpha}{4r})^2 = \frac{1}{r}(r + \frac{\alpha}{4})^2$$

En posant $u = \frac{1}{q}$ et $\rho = \frac{1}{r}$ calculons les formules suivantes qui nous seront utiles par la suite :

$$\begin{aligned} dq &= [(1 + \frac{\alpha}{4r})^2 - 2r(1 + \frac{\alpha}{4r})\frac{\alpha}{4r^2}]dr \\ &= (1 + \frac{\alpha}{4r})(1 - \frac{\alpha}{4r})dr \end{aligned}$$

et

$$du = q^{-2}dq = (1 + \frac{\alpha}{4}\rho)^{-3}(1 - \frac{\alpha}{4}\rho)d\rho$$

Ainsi que

$$u = \rho(1 + \frac{\alpha}{4}\rho)^{-2}$$

et

$$1 - \alpha u = (1 - \frac{\alpha}{4}\rho)^2(1 + \frac{\alpha}{4}\rho)^{-2}$$

La solution de Schwarzschild peut alors s'écrire

$$ds^2 = a(r)d\vec{r}^{\ 2} - b(r)dt^2$$

avec

$$a(r) = (1 + \frac{\alpha}{4r})^4 \quad , \quad b(r) = c^2(1 - \frac{\alpha}{4r})^2(1 + \frac{\alpha}{4r})^{-2}$$

et

$$\vec{r} \ = (r\sin\theta\cos\varphi \ , \ r\sin\theta\sin\varphi \ , \ r\cos\theta)$$

Selon la théorie d'Einstein le mouvement des planètes est déterminé par les géodésiques de la métrique, mais vu les résultats du premier chapitre ces mêmes géodésiques sont caractérisées par

$$i_X d\omega = 0$$

où ω est la forme de Cartan sur l'espace des états $\Gamma = (\vec{p}, E, \vec{r}, t, \tau)$ définie par

$$\omega = \vec{p}d\vec{r} - Edt - Kd\tau$$

avec

$$K = \frac{1}{2m}(a(r)^{-1}\vec{p}^{\ 2} - b(r)^{-1}E^2)$$

Ainsi nous trouvons

$$\dot{\vec{r}} = (ma(r))^{-1}\vec{p} \qquad \dot{t} = (mb(r))^{-1}E$$

K étant indépendant de τ et de t, et invariant par rotation nous avons cinq constantes du mouvement :

1) La première $K = K_o$

Si $K_o = -\frac{1}{2}mc^2$ alors $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ car dans ce cas

$$a(r)\dot{\vec{r}}^{\,2} - b(r)\dot{t}^2 = -c^2$$

2) La deuxième $E = E_o$

Ainsi compte tenu de ce qui précède

$$a(r)\dot{\vec{r}}^{\,2} - b(r)^{-1}(\frac{E_o}{m})^2 = -c^2 \tag{1}$$

3) Et enfin les trois dernières $\vec{p} \wedge \vec{r} = \vec{L}_o$

Le mouvement est donc dans un plan. Nous retrouvons la loi des aires, mais sous une forme modifiée,

$$\|ma(r)\dot{\vec{r}} \wedge \vec{r}\,\| = ma(r)r^2\dot{\theta} = L_o \tag{2}$$

Nous pouvons alors résoudre le problème par intégration en suivant la même méthode que pour le problème de Kepler classique. L'équation (1) s'écrit

$$a(r)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - b(r)^{-1}(\frac{E_o}{m})^2 = -c^2$$

d'où en tenant compte de (2)

$$\dot{r}^2 = (a(r)b(r))^{-1}(\frac{E_o}{m})^2 - (a(r)r)^{-2}(\frac{L_o}{m})^2 - a(r)^{-1}c^2$$

et ainsi en remplaçant dt par $a(r)r^2 d\theta L_o^{-1}$nous trouvons

$$(\frac{dr}{r^2 d\theta})^2 = a(r)b(r)^{-1}(\frac{E_o}{L_o})^2 - r^{-2} - a(r)(\frac{m}{L_o})^2 c^2$$

ou encore

$$(\frac{d\rho}{d\theta})^2 = (1 + \frac{\alpha}{4}\rho)^6(1 - \frac{\alpha}{4}\rho)^{-2}(\frac{E_o}{L_o})^2 c^{-2} - \rho^2 - (1 + \frac{\alpha}{4}\rho)^4(\frac{m}{L_o})^2 c^2$$

En prenant la racine de chaque membre et en intégrant sur ρ nous pouvons déterminer θ en fonction de ρ. En fait il est plus commode de revenir à la variable u. D'après les formules précédentes il vient

$$(\frac{du}{d\theta})^2 = (-q^{-2}\frac{dq}{d\theta})^2 = (r^{-2}\frac{dr}{d\theta})^2(1 - \frac{\alpha}{4}\rho)^2(1 + \frac{\alpha}{4}\rho)^{-6}$$

Ainsi

$$(\frac{du}{d\theta})^2 = (\frac{E_o}{L_o c})^2 - u^2(1-\alpha u) - (1-\alpha u)(\frac{mc^2}{L_o c})^2$$

ou encore

$$(\frac{du}{d\theta})^2 = \frac{E_o^2 - (mc^2)^2}{(L_o c)^2} + \alpha(\frac{mc^2}{L_o c})^2 u - u^2 + \alpha u^3$$

Il convient maintenant de rappeler les résultats de la théorie de Newton. L'équation correspondante décrivant le problème de Kepler est bien connue, c'est

$$(\frac{du}{d\theta})^2 = \frac{2m(E_o - mc^2)}{L_o^2} + 2fM_\odot(\frac{m}{L_o})^2 u - u^2$$

Le minimum et le maximum de u correspondent à l'aphélie et au périhélie de l'orbite. Les valeurs correspondantes, notées respectivement u_1 et u_2, sont déterminés par les racines de l'équation quadratique

$$u^2 - Bu - A = 0$$

où

$$A = \frac{2m(E_o - mc^2)}{L_o^2} \quad \text{et} \quad B = 2fM_\odot(\frac{m}{L_o})^2$$

Ces racines doivent être réelles et positives pour représenter une orbite (une route) autour du soleil. L'accroissement de θ de θ_1 à θ_2 durant l'accroissement de u de u_1 à u_2 s'obtient par intégration

$$\theta_2 - \theta_1 = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{((u-u_1)(u_2-u))^{\frac{1}{2}}} = \arcsin \frac{u - \frac{1}{2}(u_1+u_2)}{\frac{1}{2}(u_2-u_1)}\Bigg|_{u_1}^{u_2} = \pi$$

C'est pourquoi le mouvement correspondant est périodique, c'est une ellipse et

$$q = \frac{a}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_o)}$$

Pour le cas particulier de l'orbite de Mercure nous avons les données suivantes

$$u_1 = \frac{1-\varepsilon}{a} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{1+\varepsilon}{a}$$

avec

$$\varepsilon = 0,2056 \quad \text{et} \quad a = 5,786\ \ 10^{10} m$$

En comparant l'équation de la théorie de Newton que nous venons de rappeler à celle que nous avons trouvée par la théorie d'Einstein, nous sommes conduit à poser :

$$\alpha = 2fM_\odot c^{-2} = 2,956\ 10^3 m$$

car αu étant très petit par rapport à u nous pouvons en première approximation négliger αu^3 devant u^2 et remplacer

$$E_o^2 - (mc^2)^2 = (E_o + mc^2)(E_o - mc^2)$$

par son approximation non-relativiste

$$2mc^2(E_o - mc^2)$$

Revenons à l'équation d'Einstein complète. Elle admet trois racines u_1, u_2 u_3. En tenant compte de la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{\alpha}$$

nous pouvons mettre cette équation sous la forme

$$\frac{du}{d\theta} = \pm[\alpha(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm\left[(u - u_1)(u_2 - u)[1 - \alpha(u_1 + u_2)][1 - \frac{\alpha u}{1 - \alpha(u_1 + u_2)}]\right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour αu beaucoup plus petit que 1 nous pouvons écrire en première approximation

$$[1 - \alpha(u_1 + u_2)]^{-\frac{1}{2}}[1 - \frac{\alpha u}{1 - \alpha(u_1 + u_2)}]^{-\frac{1}{2}} = [1 + \frac{\alpha}{2}(u_1 + u_2)](1 + \frac{\alpha}{2}u) + \cdots$$

Ainsi dans cette approximation

$$\theta_2 - \theta_1 = [1 + \frac{\alpha}{2}(u_1 + u_2)] \int_{u_1}^{u_2} \frac{(1 + \frac{\alpha}{2}u)du}{[(u - u_1)(u_2 - u)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\pi[1 + \frac{3\alpha}{4}(u_1 + u_2)]$$

$$\simeq \pi[1 + \frac{3\alpha}{4}2a^{-1}]$$

L'orbite n'est donc pas périodique et l'avance du périhélie par révolution est

$$\Delta\theta = 3\pi\alpha a^{-1} = 5,0 \;\; 10^{-7} \text{ radian}$$

Soit encore, en comptant par siècle et en seconde d'arc,

$$5,0 \;\; 10^{-7} \cdot 100 \cdot \frac{365}{88} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 3.600 = 42,8 \text{ sec. d'arc par siècle}$$

car la révolution de Mercure est de 88 jours solaires moyens.

Comparaison de la solution de Newton avec celle de Schwarzschild

La solution de Newton du problème à un corps est donnée par l'expression bien connue

$$\vec{F}(q,t) = -fmM_{\odot}\frac{1}{q^2}\vec{e}_q$$

La connexion correspondante est

$$\omega_q{}^{\theta} = -\omega_{\theta}{}^{q} = d\theta \ , \quad \omega_q{}^{\varphi} = -\omega_{\varphi}{}^{q} = \sin\theta d\varphi \ , \quad \omega_{\theta}{}^{\varphi} = -\omega_{\varphi}{}^{\theta} = \cos\theta d\varphi$$

$$\omega_t{}^{q} = fM_{\odot}\frac{1}{q^2}dt \quad , \quad \omega_t{}^{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad \omega_t{}^{\varphi} = 0$$

En effet la courbure spatiale étant nulle nous obtenons les trois premiers termes par la géometrie euclidienne usuelle, ils définissent une rotation infinitésimale $d\theta$,$d\varphi$ du repère. Les trois derniers se déduisent de la formule générale que nous avions obtenue :

$$\omega_t{}^{i} = -\frac{1}{m}F^i(\vec{x},t)dt$$

il definissent une transformation de Galilée pure, de vitesse infinitésimale $v = fM_{\odot}\frac{1}{q^2}dt$ dans la direction $\vec{e}_q$.

D'autre part la connexion trouvée pour la solution d'Einstein est

$$\omega_q{}^{\theta} = -\omega_{\theta}{}^{q} = e^{-1}(q)d\theta = (1-\frac{\alpha}{q})^{\frac{1}{2}}d\theta \ , \quad \omega_q{}^{\varphi} = -\omega_{\varphi}{}^{q} = e^{-1}(q)\sin\theta d\varphi = (1-\frac{\alpha}{q})^{\frac{1}{2}}\sin\theta d\varphi$$

$$\omega_{\theta}{}^{\varphi} = -\omega_{\varphi}{}^{\theta} = \cos\theta d\varphi \ , \quad \omega_t{}^{q} = c^2\omega_q{}^{t} = c^2e^{-1}(q)h'(q)dt = \frac{c^2\alpha}{2q^2}dt$$

$$\omega_t{}^{\theta} = \omega_{\theta}{}^{t} = 0 \ \text{ et } \ \omega_t{}^{\varphi} = \omega_{\varphi}{}^{t} = 0$$

Les trois premiers termes définissent bien une rotation infinitésimale, mais le facteur $(1-\frac{\alpha}{q})^{\frac{1}{2}}$ qui apparaît dans les deux premiers traduit une courbure d'espace qui n'existe pas dans la solution de Newton. Les trois derniers termes définissent une transformation de Lorentz pure de vitesse infinitésimale

$$v = \frac{c^2\alpha}{2q^2}dt$$

Il faut alors remarquer que ces deux vitesses, vu la valeur choisie pour α, sont formellement les mêmes :

$$fM_{\odot}\frac{1}{q^2} = \frac{c^2\alpha}{2q^2}$$

la seule différence étant due à la définition de q . En effet dans la théorie de Newton q est la distance du point considéré au centre du soleil, alors que dans Einstein cette même distance est donnée, en principe, par

$$\int_{q_o}^{q}\frac{1}{(1-\frac{\alpha}{q})^{\frac{1}{2}}}dq$$

Mais cette intégrale ne peut pas être définie depuis le centre vu la singularité en $q = \alpha$. Il y a donc une difficulté. Si ignorant cette difficulté, nous commençons l'intégration à la surface du soleil, dont le rayon $R_{\odot} = 6,963\ 10^8 m$ est bien plus grand que α alors dans ces conditions la correction relativiste pour la région extérieure est extrêmement faible.

Une solution du problème intérieur

Comme nous venons de voir la solution de Schwarzschild présente une singularité pour $q = \alpha$ et même après un autre choix de variables il reste toujours une singularité quelque part au voisinage du centre. Ainsi par exemple, dans la variable r que nous avions introduite, la singularité est pour $r = \frac{\alpha}{4}$ ce qui ici correspond au même point $q = \alpha$.

Mais physiquement la solution que nous avons calculée n'est plus valable car nous nous trouvons en fait à l'intérieur du soleil et le tenseur d'énergie-impulsion de matière π^μ n'est plus nul. Le modèle le plus simple d'un tel tenseur pour l'intérieur du soleil est du type

$$\pi^\mu = T^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\rho\lambda\kappa}\omega^\rho \wedge \omega^\lambda \wedge \omega^\kappa$$

avec $\varepsilon_{\nu\rho\lambda\kappa}$ le tenseur complètement antisymétrique tel que $\varepsilon_{q\theta\varphi t} = 1$ dans tout système de coordonnées. De plus nous imposerons

$$T^{tt} = \rho \text{ une constante, la densité}$$

$$T^{qq} = T^{\theta\theta} = T^{\varphi\varphi} = p(q) \text{ la pression}$$

Ces conditions correspondent à un fluide :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p(q))\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + g^{\mu\nu}p(q)$$

supposé au repos

$$\frac{dx^\mu}{ds} = (0,0,0,1)$$

incompressible

$$\rho = \text{ constante}$$

et à symétrie sphérique

$$p = p(q)$$

Seul le membre de droite des équations d'Einstein est changé, il n'est plus identiquement nul. Nous avons donc à résoudre quatre nouvelles équations

1) $$e(e^{-2} - 1)\sin\theta + q\sin\theta(e^{-1})' = -\frac{f}{c^2}\rho e q^2 \sin\theta$$

ici et comme dans la suite p, e et h sont des fonctions de q.

En posant comme précédement $a = e^{-2}$ cette équation s'écrit

$$a - 1 + qa' = -\frac{f}{c^2}\rho q^2$$

En posant alors, selon la méthode de variation des constantes

$$a(q) = 1 - \frac{\alpha(q)}{q}$$

il vient

$$\alpha' = \frac{f}{c^2}\rho q^2$$

d'où la solution

$$\alpha(q) = \frac{f}{3c^2}\rho q^3 + \text{constante}$$

mais cette constante doit être nulle pour éviter la singularité et ainsi

$$e(q) = (1 - \frac{f}{3c^2}\rho q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

L'équation 2) (équivalente à l'équation 4)) s'écrit de même

2) $$h(e^{-1})' + e^{-1}h' + q(h'e^{-1})' = \frac{f}{c^2}pheq$$

Enfin la dernière équation s'écrit

3) $$2qe^{-2}h'\sin\theta + h(e^{-2} - 1)\sin\theta = \frac{f}{c^2}pq^2h\sin\theta$$

pour résoudre ces équations nous allons tout d'abord chercher une condition sur p', le gradient de la pression. Posons

$$e(q) = \mathbf{e}^{\frac{1}{2}\lambda(q)} \qquad \text{et} \qquad h(q) = \mathbf{e}^{\frac{1}{2}\nu(q)}$$

alors

$$(e^{-1})' = -\frac{1}{2}\lambda'\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\lambda} \quad , \quad h' = \frac{1}{2}\nu'\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\nu} \quad \text{et} \quad h'e^{-1} = \frac{1}{2}\nu'\mathbf{e}^{\frac{1}{2}(\nu-\lambda)}$$

Dans ces notations l'équation 1), divisée par $-eq^2\sin\theta$, s'écrit

a) $$\mathbf{e}^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{2q} - \frac{1}{q^2}) + \frac{1}{q^2} = \frac{f}{c^2}\rho$$

De même l'équation 2), divisée par heq, s'écrit

b) $$\mathbf{e}^{-\lambda}(-\frac{\lambda'}{2q} + \frac{\nu'}{2q} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4}) = \frac{f}{c^2}p$$

et de même l'équation 3), divisée par $q^2h\sin\theta$ s'écrit

c) $$\mathbf{e}^{-\lambda}(\frac{\nu'}{q} + \frac{1}{q^2}) - \frac{1}{q^2} = \frac{f}{c^2}p$$

Alors en soustrayant c) de b) nous obtenons

$$\mathbf{e}^{-\lambda}(-\frac{\lambda'}{2q}+\frac{\nu'}{2q}+\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\nu'}{q}-\frac{1}{q^2})+\frac{1}{q^2}=0$$

qui peut aussi s'écrire, en réarrangeant les termes et en multipliant par $\frac{2}{q}$,

$$\mathbf{e}^{-\lambda}(\frac{\nu''}{q}-\frac{\nu'}{q^2}-\frac{2}{q^3})-\mathbf{e}^{-\lambda}\lambda'(\frac{\nu'}{q}+\frac{1}{q^2})+\frac{2}{q^3}+\mathbf{e}^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{q}+\frac{\nu'}{q})\frac{\nu'}{2}=0$$

En dérivant c) et en comparant nous pouvons alors écrire

$$\frac{f}{c^2}p'+\mathbf{e}^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{q}+\frac{\nu'}{q})\frac{\nu'}{2}=0$$

Finalement en tenant compte de a) et c) nous obtenons l'expression cherchée

$$p'+(\rho+p)\frac{\nu'}{2}=0$$

Cette équation s'intègre facilement,sa solution est :

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\nu}(\rho+p)=\text{constante}$$

Ainsi il reste seulement à résoudre

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\nu}\mathbf{e}^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{q}+\frac{\nu'}{q})=\text{constante}$$

En y substituant la solution trouvée précédemment

$$\mathbf{e}^{-\lambda}=e(q)^{-2}=1-\frac{f}{3c^2}\rho q^2$$

il vient

$$\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\nu}(2\frac{f}{3c^2}\rho+\frac{\nu'}{q}-\frac{f}{3c^2}\rho q\nu')=\text{constante}$$

En revenant à la fonction $h(q)=\mathbf{e}^{\frac{1}{2}\nu(q)}$, cette équation s'écrit

$$2h\frac{f}{3c^2}\rho+\frac{2}{q}h'-2\frac{f}{3c^2}\rho qh'=\text{constante}$$

ou encore

$$h\frac{f}{3c^2}\rho+\frac{1}{q}(1-\frac{f}{3c^2}\rho q^2)h'=\text{constante}$$

C'est une équation linéaire, sa solution générale est une combinaison linéaire de deux solutions particulières, en d'autre termes

$$h(q) = A - B(1 - \frac{f}{3c^2}\rho q^2)^{\frac{1}{2}}$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

Nous avons ainsi déterminé les fonctions e et h. En posant pour simplifier l'écriture

$$Q^{-2} = \frac{f}{3c^2}\rho$$

la solution finale s'écrit

$$ds^2 = \frac{dq^2}{1 - \frac{q^2}{Q^2}} + q^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - [A - B(1 - \frac{q^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}}]^2 dt^2$$

Il reste cependant à déterminer les constantes A, B et ρ. C'est ce que nous ferons en demandant que pour $q = q_o$, au bord soleil, la solution que nous venons de trouvée se raccorde à la solution extérieure. Nous trouvons une première condition en comparant les coefficients de dq^2

$$\frac{q_o^2}{Q^2} = \frac{\alpha}{q_o}$$

En tenant compte de la valeur de

$$\alpha = 2\frac{f}{c^2}M_\odot$$

nous en déduisons la valeur de la densité de matière

$$\rho = 6\frac{M_\odot}{q_o^3}$$

La singularité de Schwartzschild aura bien disparue si

$$q_o > \alpha$$

c'est-à-dire si pour q_o donné $M_\odot$ n'est pas trop grand.

La seconde condition de raccordement, relative aux coefficients de dt^2, impose

$$[A - B(1 - \frac{q_o^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}}]^2 = c^2(1 - \frac{\alpha}{q_o})$$

Compte tenu de la première condition cette équation implique

$$[A - B(1 - \frac{q_o^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}}]^2 = c^2(1 - \frac{q_o^2}{Q^2})$$

Pour déterminer A et B nous allons demander en plus que sur la surface $q = q_o$ la pression $p(q)$ s'annulle.

Pour déterminer $p(q)$ nous reprenons l'équation c), en y insérant nos résultats. En remarquant que

$$\mathbf{e}^{-\lambda}\frac{\nu'}{q} = (1-\frac{q^2}{Q^2})(1-\frac{q^2}{Q^2})^{\frac{-1}{2}}\frac{2B}{Q^2}[A - B(1-\frac{q^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

et

$$\mathbf{e}^{-\lambda}\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2} = (1-\frac{q^2}{Q^2})\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2} = -\frac{1}{Q^2}$$

il vient

$$p(q) = c^2 f^{-1}\frac{1}{Q^2}\frac{3B(1-\frac{q^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}} - A}{A - B(1-\frac{q^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi la condition $p(q_o) = 0$ impose

$$A = 3B(1-\frac{q_o^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}}$$

ce qui en tenant compte des résultats précédents fournit la solution complète du problème intérieur

$$B = \frac{c}{2} \quad \text{et} \quad A = \frac{3}{2}c(1-\frac{q_o^2}{Q^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}c(1-\frac{\alpha}{q_o})^{\frac{1}{2}}$$

Deux modèles de l'Univers dans son ensemble

Si nous considérons l'Univers entier comme un fluide homogène, de densité ρ et de pression constante p , la solution générale que nous avons trouvée nous en fournit deux modèles.

Il suffit de poser dans cette solution $B = 0$ et $A = c^2$ pour obtenir un premier modèle, soit

$$ds^2 = \frac{dq^2}{1-\frac{q^2}{Q^2}} + q^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2dt^2$$

La pression p déduite de la formule trouvée est bien constante

$$p = -c^2 f^{-1} Q^{-2} = -\frac{1}{3}\rho$$

Il n'est finalement pas difficile de remarquer que la géométrie de la partie spatiale de cet Univers est identique à celle de la sphère S^3. En effet en posant pour $q < Q$

$$\sin k = \frac{q}{Q}$$

il vient

$$ds^2 = Q^2[dk^2 + \sin^2 k(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] - c^2 dt^2$$

Ainsi Q peut s'interpréter comme le rayon (le rayon de la sphère S^3) de l'Univers. C'est le modèle d'Einstein.

Nous pouvons obtenir un autre modèle, aussi à pression constante, en posant $A = 0$ et $B = c^2$ il vient

$$ds^2 = \frac{dq^2}{1 - \frac{q^2}{Q^2}} + q^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2(1 - \frac{q^2}{Q^2})dt^2$$

Dans ce cas $p = -\rho$, c'est le modèle de de Sitter.

Genève, octobre 1995.

New Einstein Gravitation*

C. Piron

Département de Physique Théorique, CH-1211 Genève 4

Abstract: Taking into account the experimental accuracy of the body motions in the solar system, we propose a General Relativity Theory which is new but nevertheless completely metric.

Space-time or Space and Time

Let us first recall some experimental results. The atomic clocks are so precise that we can check the relativistic effects. Each clock follows and measures its own proper time as it is defined in general relativity(1). The UAI (Union Atomic Inernational) recommends to choose $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ and

$$ds^2 = -c^2(d\tau)^2 = -(1 - 2U/c^2)(dx^0)^2 + (1 + 2U/c^2)(d\vec{x})^2$$

where c is the light velocity, τ the proper time $U > 0$ is the Newton gravitational potential of all the masses...With such formula it is possible to correct each individual clock by measuring its apparent acceleration and so to obtain a local synchronization which permits to define the time coordinate t and a 3-dimensional hypersurface. An unexpected result is that all objects are allways confined in this subspace. But this is impossible since in Minkowski space such subspace depend of the arbitrairy choice of a reference galilean frame (geocentric or barycentric). So we have to change our window and to admit that we are in a 3-dimensional space with a flow of time. Each observer build its time and its own Minkowski 4-space (x^0, x^1, x^2, x^3) from the same time and the same space (2).

Let us now reconsider general relativity to see the impact of such result. We will adopt the requirement claiming that everythings in general relativity must be derived from a given metric:

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu = -c^2(\omega^0)^2 + (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2$$

but we will utilise all resource of the Cartan formalism in such metric geometry to construct the theory.

---

*given at the IARD 2004 Conference, Saas-Fee Switzerland

Cartan Formalism in Metric Spaces

Cartan connexion

$$d\vec{m} = \omega^\mu \vec{e_\mu} \qquad d\vec{e_\mu} = \omega_\mu{}^\nu \vec{e_\nu}$$

Galilean connexion

$$\omega^0 = dt \qquad \omega_i{}^j = -\omega_j{}^i \qquad \omega_i{}^0 = 0$$

Lorentz connexion

$$\omega_i{}^j = -\omega_j{}^i \qquad \omega_i{}^0 = c^{-2}\omega_0{}^i$$

Torsion and curvature

$$\Omega^\mu = d\omega^\mu - \omega^\rho \wedge \omega_\rho{}^\mu \qquad \Omega_\mu{}^\nu = d\omega_\mu{}^\nu - \omega_\mu{}^\rho \wedge \omega_\rho{}^\nu$$

From the Hilbert elementary action

$$\sum_{(\mu\nu\rho\lambda)} \omega_\mu \wedge \omega_\nu \wedge \Omega_{\rho\lambda}$$

Cartan derives the energy-momentum torque

$$G = \sum_{(\mu\nu\rho\lambda)} \Big(\vec{e}_\mu(\omega_\nu \wedge \Omega_{\rho\lambda} + \omega_\rho \wedge \Omega_{\lambda\nu} + \omega_\lambda \wedge \Omega_{\nu\rho}) - \vec{e}_\mu \wedge \vec{e}_\nu(\omega_\rho \wedge \Omega_\lambda - \omega_\lambda \wedge \Omega_\rho)\Big)$$

It is formed of a vector with components

$$G^\mu = \omega_\nu \wedge \Omega_{\rho\lambda} + \omega_\rho \wedge \Omega_{\lambda\nu} + \omega_\lambda \wedge \Omega_{\nu\rho}$$

and a bivector with components

$$G^{\mu\nu} = \omega_\rho \wedge \Omega_\lambda - \omega_\lambda \wedge \Omega_\rho$$

The exterior derivative of G is not zero but a vector with components

$$F^\mu = \Omega_\nu \wedge \Omega_{\rho\lambda} + \Omega_\rho \wedge \Omega_{\lambda\nu} + \Omega_\lambda \wedge \Omega_{\nu\rho}$$

In a Riemann connexion which has by definition no torsion

$$\Omega_\mu = 0 \qquad G^{\mu\nu} = 0 \quad \text{and} \quad F^\mu = 0$$

and G^μ turn out to be just the 3-form build up from the famous conserved Einstein tensor $R^{\mu\nu} - 1/2 g^{\mu\nu} R$.

In the following we will utilise also two well-known results

The Weyl Theorem:

If $\Omega^\mu - d\omega^\mu$ is given by $\lambda_\rho{}^\mu{}_\nu \omega^\rho \wedge \omega^\nu$ then

$$\omega_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu\rho}\omega^\rho \quad \text{where} \quad \gamma_{\mu\nu\rho} = \lambda_{\mu\nu\rho} - \lambda_{\nu\rho\mu} + \lambda_{\rho\mu\nu}$$

The Cartan Lemma:

If all $\vec{e}_\mu \wedge \vec{e}_\nu (\omega_\rho \wedge X_\delta - \omega_\delta \wedge X_\rho) = 0$ where X_δ are 2-forms then

$$\text{all} \quad X_\delta = 0$$

The new Theory

Since each atomic clock indicates its own proper time we must impose

$$\Omega^0 = d\omega^0 - \omega^i \wedge \omega_i{}^0 = 0$$

and via the synchronization we obtain

$$\omega^0 = f(x)dt$$

Let us now verify that according to Weyl Theorem we can choose

$$\omega_0{}^i = -Y^i \omega^0 \qquad \text{and} \qquad \omega_i{}^j = 0\,.$$

Proof

By definition the coefficients Y^i are such that

$$\Omega^0 - d\omega^0 = -d\omega^0 = -df \wedge dt = -c^{-2}\, Y_i\, \omega^i \wedge \omega^0\,.$$

Then we have

$$\lambda_i{}^0{}_0 = -1/2c^{-2}\, Y_i \quad \text{and} \quad \lambda_i{}^0{}_j = 0$$

and so by Weyl Theorem

$$\gamma_{0i0} = \lambda_{0i0} - \lambda_{i00} + \lambda_{00i} = -Y_i$$

and

$$\gamma_{0ij} = \lambda_{0ij} - \lambda_{ij0} + \lambda_{j0i} = 0\,.$$

Thus we find

$$\omega_{0i} = \gamma_{0i0}\,\omega^0 + \gamma_{oij}\,\omega^j = -Y_i\,\omega^0$$

and

$$\omega_{ij} = \gamma_{ij0}\,\omega^0 + \gamma_{ijk}\,\omega^k = 0\,.$$

From these we derive the following results

$$\Omega^i = d\omega^i \qquad \Omega_i{}^j = 0 \quad \text{and} \quad \Omega_0{}^i = d\omega_0{}^i$$

The space has no curvatur but it is not flat since its torsion is not zero.

Let us now recall the Newton-Cartan Theory :

The torsion $\Omega^\mu = 0$, the space is flat, all ${\omega_i}^j$ can be choosed to be zero and the last one ${\omega_0}^i$ is the Newton gravitational acceleration $-F^i\,\omega^0$. In such connexion the physical trajectories are just straight lines.

In our relativistic theory we have ${\omega_0}^i = -Y^i\,\omega^0$, the Einstein gravitational acceleration but, here of course, ${\omega_i}^0$ is not zero since it is a Lorentz connexion.

The straight lines are not exactly the geodesics but this makes no difference for the prediction of the Mercury perihelion shift (4).

On the other hand the Cartan torque reduces to a space vector

$$G^i = \omega_j \wedge \Omega_{k0} + \omega_k\,\Omega_{0j}$$

and a bivector

$$G^{0i} = \omega_j \wedge \Omega_k - \omega_k \wedge \Omega_j$$

According to the Cartan Lemma, $G^i = 0$ impose $\Omega_{0k} = d\omega_{0k} = 0$ and the gravitational acceleration is uniform. More $G^{0i} = 0$ impose $\Omega_k = 0$, the space is flat. All these are in agreement with the hope of Einstein himself before he knews Schwarzschild results.

Références

1)Claude Audoin et Bernard Guinot 1998 ; “Les fondements de la mesure du temps p.27” Masson, Paris.

2)A.O.Barut edit.1989. ; “New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics p.495-506” Plenum Press New-york.

3)E. Cartan 1924 ; “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, première partie” *Ann.Ec. Norm.* **41** 1-23.

4)Tarik Garidi 1999 ; “La gravitation d’Einstein dans l’approximation de Cartan -Newton” Département de physique théorique, Genève.

Further Clarification of "New Einstein Gravitation"

Constantin Piron
Département de Physique Théorique, CH-1211 Genève 4

I wish to explain further here the ideas of Cartan and my paper "New Einstein Gravitation" [1]. It is not a question of constructing a different theory, but another interpretation, taking into account the fault hinted at by Einstein that the flow of time is an illusion and therefore that particles follow their trajectories according only to their proper times. When Cartan gives in the tangent space at each point a frame adapted to the group considered, he does not specify the system of coordinates, and still less a frame naturally defined by the coordinates; there are therefore no *vierbeins*, the objects with two indices. The tangent space is in fact a notion intrinsic to the manifold. The form ω puts into correspondence to a vector f a number or an element of an algebra. The exterior product is defined in general as

$$\omega_1 \wedge \omega_2(f_1, f_2) = \omega_1(f_1)\omega_2(f_2) - \omega_1(f_2)\omega_2(f_1)$$

Therefore one permutes the vectors and not the values taken by the forms.

For the particles following trajectories which are timelike, one can make the assumption with Einstein that these are geodesics and so one does not have the interpretation of spacelike curves in R^4. One requires a connection, but why to choose that of Lévi-Civita?

On the other hand, Einstein is mistaken; the particles remain confined in an R^3 contained in R^4, but then which one? The answer is simple. It is the one which has been take at the beginning to construct the R^4, and therefore in a change of the Galilean frame the R^3 is the same and it is the R^4 that changes. One must therefore define a connection for this R^3 which is now non-Euclidean (this is the inspired idea of Einstein). This is why I have chosen the connection for which $\omega_{ij} = \omega_{ji} = 0$ for such R^3, which then necessarily has torsion (see my paper ref.1). It is not correct to deduce that an object which moves freely does not turn, but there is not in addition a rotation due to the Lévi-Civita connection, a very little term (see the reference to Garidi in my paper ref.1). The predictions remain almost the same, and the theory is preserved.

REFERENCES

1. C. Piron, New Einstein Gravitation *Found. of Phys.* **35** p.1643-1647 (2005).