CHAMPS ANALYTIQUES

C. Piron

43 Grand'rue CH-1196 Gland

1 Introduction

1.1 Variétés C^∞

Considérons Σ un espace abstrait, par exemple l'espace de toutes les variables d'un système donné. Sur Σ on définit des fonctions :

$$g : \quad \Sigma \ni P \longmapsto g(P) \in R\,.$$

Nous supposerons toujours que ces fonctions sont C^∞.

La donnée ordonnée de n fonctions x^i définit une application de Σ dans R^n. Si cette application est bijective sur un domaine de Σ dont l'image dans R^n est un **pavé**, un produit ordonné d'intervalles, on dira que les x^i définissent un **système de coordonnées locales**. Si autour de chaque point de Σ il existe un système de coordonnées locales on dira que Σ est une **variété différentiable** C^∞ de dimension n.

Un **vecteur tangent** au point P peut être défini par une courbe :

$$f : \; R \ni t \longmapsto f(t) \in \Sigma$$

passant par P pour $t = 0$. L'ensemble $V(P)$ des vecteurs tangents en P a la sructure d'un espace vectoriel.

Pour un système de coordonnées locales $x^i(P)$, les n vecteurs tangents correspondant aux n courbes

$$e_i \; : \quad R \ni t \longmapsto (\, x^1(P), \ldots, x^i(P) + t, \ldots, x^n(P) \in R^n)$$

forment une base de $V(P)$. Une telle base est le **repère naturel** associé aux $x^i(P)$.

1.2 Formes différentielles

Une **forme** ω sur $V(P)$ est par définition une application linéaire de $V(p)$ dans R:

$$\omega : \quad V(P) \ni f \longmapsto \omega(f) \in R$$

L'ensemble des formes ω hérite d'une structure vectorielle et définit $V'(P)$ le **dual** de $V(P)$.

Au repère naturel e_i au point P correspond un repère de $V'(P)$, dual du repère naturel. A chaque vecteur e_{i_0} est associé **une forme** dx^{i_0},qui est définie par l'application qui à chaque $f \in V(P)$ fait correspondre la composante f^{i_0} :

$$dx^{i_o} : \quad V(P) \ni f \longmapsto dx^{i_0}(f) = f^{i_0} \in R.$$

Ainsi au point P, l'ensemble des formes dx^i définit une base de $V'(P)$ car nous pouvons écrire

$$\omega(f) = \omega(f^i e_i) = f^i \omega(e_i) = dx^i(f)\, \omega(e_i)$$

Un champ de formes est appelé une 1-forme différentielle par analogie aux fonctions qui sont des 0-formes différentielles. Cette terminologie tire sa justification de la notion de différentielle extérieur dont nous allons maintenant donner la définition. Donnons-nous dans un même pavé de Σ un point P de coordonnées (x^i) et un autre point P' voisin de P de coordonnées $(x^i + \delta x^i)$. La courbe $f(t)$

$$f : \quad R \ni t \longmapsto (x^i + \delta x^i t) \in R^n$$

passe par P et correspond donc à un vecteur tangent dont les composantes dans le repère naturel sont les δx^i donnés. Soit $g(x^i)$ une fonction quelconque. La formule de Taylor permet d'écrire

$$g(P') = g(P) + \partial_i g(P)\, \delta x^i + \cdots$$

ou encore avec nos définitions

$$g(P') = g(P) + \partial_i g(P)\, dx^i(f) + \cdots$$

Ainsi à la 0-forme différentielle $g(P)$ correspond une 1-forme différentielle $dg = \partial_i g(P)\, dx^i$ qui approxime la valeur de g aux points voisins. Cette 1-forme différentielle est appelée la diffrentielle de g. Cette opération s'étend en posant

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} dA_{i_1 \cdots\, i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\,.$$

On a alors les deux règles suivantes :

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge d\omega_2 \quad p_1 \text{ le degré de } \omega_1 \quad \text{et} \quad dd\omega = 0\,.$$

Il reste encore à définir **le produit intérieur** d'une p-forme différentielle ω par un champ de vecteurs ξ , ce qui donnera une $(p-1)$-forme différentielle que nous noterons $i_\xi \omega$. Nous poserons :

$$i_\xi \omega(f_2, f_3, \ldots, f_p) = \omega(\xi, f_2, \ldots, f_p)$$

et on a deux autres règles :

$$i_\xi(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_\xi \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge i_\xi \omega_2 \quad p_1 \text{ le degré de } \omega_1 \quad \text{et} \quad i_\xi i_\xi \omega = 0\,.$$

Pour illustrer ce formalisme démontrons le théorème de Stokes. Pour cela il nous faut d'abord rappeler la notion d'intégrale. Si $\omega(P)$ est une n-forme différentielle d'espèce impaire, à support compact à l'intérieure d'un système de coordonnées locales, son intégrale sur R^n est par définition

$$\int \omega(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} A_{1\cdots n}(x) dx^1 \cdots dx^n \,.$$

En particulier le volume d'un pavé E de R^p, considéré comme plongé canoniquement dans Σ est

$$\int \chi(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p = \int_E dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$$

où χ est la fonction caractéristique qui vaut 1 sur le pavé et 0 en dehors. Les densités qui interviennent en physique sont des n-formes différentielles d'espèce impaire, c'est pourquoi la valeur obtenue après intégration ne dépendra pas de l'ordre d'intégration. Sur un pavé E de R^n l'intégrale que nous voulons calculer se réduit à un seul terme :

$$\int_E g(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \,.$$

Si $g(x)$ est positif, celle-ci n'est rien d'autre que la mesure du volume W obtenu en élevant à partir de E une hauteur $y = g(x)$. Ce qui permet d'écrire :

$$\int_E g(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_W dy \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{bW} y dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \,.$$

En effet sur bW, le bord de W, le terme correspondant à la face $y = g(x)$ donne l'intégrale et la contribution des autres faces est nulle.

En généralisant ce résultat nous obtenons le **théorème de Stokes** :

$$\int_W d\omega = \int_{bW} \omega.$$

En particulier, sur le segment P_1P_2, ce théorème s'écrit

$$\int_{P_1}^{P_2} dg = g(P_2) - g(P_1)$$

car, si P est un point à l'intérieur de ce segment, PP_2 a la même orientation que P_1P_2 alors que PP_1 a l'orientation opposée.

1.3 Image transposée et dérivée de Lie

Soit W une autre variété et μ une application de W dans Σ. L'**image transposée** d'une fonction g définie sur Σ est la fonction $\mu^* g$ définie sur W en posant pour $Q \in W$

$$\mu^* g(Q) = g(\mu Q).$$

En remarquant, que $\mu^*(f+g) = \mu^* f + \mu^* g$ et que $\mu^*(fg) = (\mu^* f)(\mu^* g)$ nous pouvons définir l'image transposée d'une p-forme différentielle

$$\omega = A_{i_1 < \cdots < i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

en posant

$$\mu^*(\omega) = \mu^* A_{i_1 < \cdots < i_p}\, d\mu^* x^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\mu^* x^{i_p}\,.$$

Pour une p-forme différentielle ω d'espèce impaire nous ne pouvons pas définir directement son image transposée. Il nous faut supposer μ orienté, c'est-à-dire qu'il faut avoir associé continûment chaque orientation ε d'un voisinage de μQ à une orientation ε' d'un voisinage de Q. Ceci fait, nous pouvons définir l'image transposée d'une forme différentielle impaire en posant

$$\mu^* \omega = \varepsilon' \mu^*(\varepsilon \omega).$$

Considérons l'action du germe de groupe à un paramètre associée à un champ de vecteurs ξ sur Σ. Sur les fonctions coordonnées $x^i(P)$ cette action s'écrit

$$\mu_\xi^* x^i(P) = x^i(P) + \lambda \xi^i(P).$$

Par définition la **dérivée de Lie** correspondante est l'opérateur

$$L_\xi \omega \;= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mu_\xi^* \omega - \omega}{\lambda}\,.$$

Dans le cas d'une fonction g la dérivée de Lie n'est autre que la dérivée de g dans la direction ξ :

$$(L_\xi g) = dg(\xi) = i_\xi df$$

et dans le cas d'une différentielle dg nous trouvons

$$\begin{aligned}(L_\xi dg) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{d\mu_\xi^* g - dg}{\lambda} \\ &= d i_\xi dg.\end{aligned}$$

Dans ces deux cas particuliers il est facile de vérifier la formule :

$$L_\xi \omega = (i_\xi d + d i_\xi)\omega$$

qui s'étend ensuite au cas général par la règle de Leibnitz

$$L_\xi(\omega_1 \wedge \omega_2) = L_\xi \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_\xi \omega_2\,.$$

2 Principe de Cartan

2.1 Mécanique de Hamilton

Dans son cours à la Sorbonne, pour écrire les équations de Hamilton pour une particule Cartan introduit Σ l'**espace des états**, l'espace des 7 variables (p, q, t) . Un mouvement est une courbe σ de R dans R^7

$$\sigma : \quad R \ni \tau \longmapsto (p(\tau), q(\tau), t(\tau)) \in R^7 \,.$$

Physiquement $\sigma^* dt$ est toujours non nulle et σ est régulier. On peut donc définir σ par son image, la courbe tangente aux vecteurs

$$\xi(t) = (\dot{p}(t), \dot{q}(t), 1).$$

Les équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -\partial_q H(p, q, t) \\ \dot{q}(t) &= +\partial_p H(p, q, t) \end{aligned}$$

s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma^*(dp + \partial_q H(p, q, t)\, dt) &= 0 \\ \sigma^*(dq - \partial_p H(p, q, t)\, dt) &= 0\,. \end{aligned}$$

Ces six équations peuvent se résumer en une seule condition

$$\forall Y \in V(P) \qquad \Big(dp + \partial_q H(p, q, t)\, dt\Big) \wedge \Big(dq - \partial_p H(p, q, t)\, dt\Big)\big(Y, \xi(t)\big) = 0\,,$$

La 2-forme différentielle que nous venons d'introduire est la différentielle extérieure de

$$\omega = p\, dq - H(p, q, t)\, dt$$

la 1-**forme de Cartan**. En conclusion, le système d'équations de Hamilton est équivalent à la condition

$$\sigma^*(i_Y d\omega) = 0 \quad \forall Y \in V(P).$$

C'est le **principe de Cartan** pour une variable.

Illustrons ce formalisme en démontrant le **théorème de Liven**.

La courbe σ de R^7 qui satisfait les équations de Hamilton rend stationnaire l'action

$$\int_\sigma (p\, dq - H(p, q, t)\, dt)$$

Démonstration : Déformons localement σ par un petit vecteur Y et considérons la petite surface S qui s'appuie sur σ et sur $\sigma + Y$. Alors, d'après le théorème de Stokes et le principe de Cartan, on a successivement

$$\int_{\sigma+Y} \omega - \int_\sigma \omega = \int_S d\omega = \int_\sigma i_Y d\omega = 0\,.$$

2.2 Champs sur R^4

Le principe de Cartan pour une variable peut s'étendre à quatre variables et justifie alors les équations aux dérivées partielles utilisées en physique.. Au lieu d'une dépendance en t on aura une dépendance en $(x^0 = t, x^1, x^2, x^3)$. La 1-forme de Cartan est remplacée par une 4-forme ω encore appelée la **forme de Cartan**. Le plongement de R dans Σ est remplacé par un plongement σ de R^4 dans Σ. Ici aussi Σ est un grand espace car il contient toutes les variables du problème. Le plongement étant supposé régulier il existe sur Σ quatre variables que nous pouvons identifier aux quatre x^μ. Le principe de Cartan et le théorème de Liven se généralisent et ainsi s'exprime rigoureusement le principe formel de stationnarité de l'action lagrangienne qui sert de justification à la théorie des champs. On remarquera que $\sigma^*\omega$ étant le **lagrangien**, la forme de Cartan ω est d'espèce impaire et le plongement σ orienté.

Le théorème de **Noether** qui associe un **courant conservé** à chaque invariance du lagrangien s'énonce maintenant ainsi :

Théorème : Si la 4-forme de Cartan ω est invariante sous l'action du germe de groupe associé au champ de vecteurs $\xi(P)$ alors la 3-forme $i_\xi\omega$ est conservée sur le mouvement, en d'autres termes $d(\sigma^* i_\xi \omega) = 0$.

Démonstration : Vu l'invariance de ω, on a $L_\xi\omega = 0$. Nous pouvons donc écrire en appliquant le principe de Cartan :

$$d(\sigma^* i_\xi \omega) = \sigma^*(d i_\xi \omega) = \sigma^*(-i_\xi d\omega) = 0\,.$$

On obtient ainsi une lois de conservation :

$$\partial_\nu J_\xi^\nu(x) = 0\,.$$

car $\sigma^*(i_\xi\omega)$ étant une 3-forme impaire sur R^4, elle s'écrit

$$\sigma^*(i_\xi\omega) = J_\xi^\mu(x)\,\tfrac{1}{6}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda$$

où $J_\xi^\mu(x)$ est un quadrivecteur densitaire et $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ est le tenseur canonique complètement antisymétrique d'espèce impaire dont la composante ϵ_{0123} vaut 1.

Nous pouvons maintenant passer à des exemples

3 Champ de Maxwell

3.1 Equations

Dans la théorie de Maxwell l'espace Σ est isomorphe à R^{14}. Il se compose des quatre variables positions $x^\mu = (t, x^i)$, des quatre variables $A_\mu = (-V, A_i)$ qui décriront les potentiels et finalement des six variables antisymétriques $H^{\mu\nu}$ où $H^{0i} = D^i$ sera le déplacement électrique et $H^{ij} = H_k$ sera le champ magnétique. De même qu'en mécanique classique, pour expliciter les équations, on doit se donner une 1-forme $H(p, q, t)dt$, dans la théorie de Maxwell on doit se donner une 4-forme

$$L(x, H)dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \tfrac{1}{8}\, \mu_{\mu\nu\rho\lambda}(x)\, H^{\mu\nu} H^{\rho\lambda} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\,.$$

Ce qui revientà se donner les **relations phénoménologiques**

$$B_{\mu\nu}(x, H) = \tfrac{1}{2}\, \mu_{\mu\nu\rho\lambda}(x)\, H^{\rho\lambda}$$

en particulier pour le vide :

$$B_{i0} = E_i = \varepsilon_0^{-1}\, D^i = \varepsilon_0^{-1} H^{0i} \quad \text{pour le champ électrique} \quad \text{et}$$

$$B_{ij} = B^k = \mu_0\, H_k = \mu_0\, H^{ij} \quad \text{pour l'induction magnétique.}$$

Mais ce n'est pas tout , il faut encore se donner le courant électrique

$$J^\mu(x) = \big(q(x), J^i(x)\big)$$

satifaisant la condition

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0\,.$$

Nous aurons besoin des formes différentielles suivantes :

$$\eta = \tfrac{1}{24}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda$$

$$\eta_\mu = i_\mu \eta = \tfrac{1}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda$$

$$\eta_{\mu\nu} = i_\nu i_\mu \eta = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} dx^\rho \wedge dx^\lambda$$

$$A = A_\mu dx^\mu$$

$$B = \tfrac{1}{2} B_{\mu\nu}(x, H) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$H = \tfrac{1}{2} H^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}$$

$$J = J^\mu(x) \eta_\mu\,.$$

Dans ces conditions la 4-forme de Cartan de la théorie de Maxwell s'écrit :

$$\omega = dA \wedge H - L(x, H)\,\eta - A \wedge J(x).$$

Avant tout calcul, rappelons les équations que nous voulons trouver par le principe de Cartan

$$\sigma^*(i_Y d\omega) = 0 \quad \forall Y \in V(P).$$

Ces équations peuvent s'écrire de trois manières équivalentes :

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{div} \vec{D} = q \ \text{ et } \ \operatorname{rot} \vec{H} - \partial_t \vec{D} = \vec{J} & \partial_\nu H^{\mu\nu} = J^\mu & dH = J \\ \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \ \text{ et } \ \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \partial_t \vec{A} & B_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu & B = dA\,. \end{array}$$

Cela étant rappelé, passons au calcul :

$$d\omega = dA \wedge dH - dL \wedge \eta - dA \wedge J$$

car le dernier terme $A \wedge dJ(x)$ est nul, il contient cinq dx^μ. Ensuite il n'est pas difficile de vérifier que

$$dL \wedge \eta = \tfrac{1}{2} B_{\mu\nu}(x, H)\, dH^{\mu\nu} \wedge \eta = B \wedge dH$$

ce qui permet d'écrire :

$$d\omega = (dA - B) \wedge (dH - J)\,.$$

Ainsi pour le vecteur tangent Y défini par la coordonnée A_μ, le principe de Cartan impose

$$\sigma^*(i_Y d\omega) = \sigma^*\big(dx^\mu \wedge (dH - J(x))\big) = 0$$

c'est-à-dire

$$\partial_\nu H^{\mu\nu}(x) - J^\mu(x) = 0\,.$$

Pour le vecteur tangent Y défini par la coordonnée $H^{\rho\lambda}$ ce même principe impose ensuite

$$\sigma^*((dA - B) \wedge dx^\rho \wedge dx^\lambda) = 0$$

c'est-à-dire

$$\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - B_{\mu\nu}(x, H) = 0\,.$$

3.2 Tenseur énergie-impulsion du champ de Maxwell

Il faut remarquer que si nous ajoutons à une 3-forme conservée $i_\xi\omega$ la différentielle extérieure d'une 2-forme ϕ alors la somme $\sigma^*(i_\xi\omega + d\phi)$ est encore conservée et cette nouvelle expression peut être plus facile à interpréter. C'est le cas pour l'exemple qui suit. Pour un tenseur phénoménologique $\mu_{\mu\nu\rho\lambda}$ constant (indépendant de x^μ) et un courant $J^\mu(x)$ donné nul, la 4-forme de Cartan

$$\omega = dA \wedge H - L(H)\,\eta$$

est invariante par translation le long de chacun des axes x^μ. En notant simplement μ le vecteur tangent du repère naturel correspondant , le théorème de Noether permet d'affirmer la conservation de chacun des quatre courants

$$\sigma^*(i_\mu\omega + d(A_\mu H)) = \tau_\mu{}^\nu(x)\eta_\nu\,.$$

Le tenseur $\tau_\mu{}^\nu(x)$ ainsi construit est appelé le **tenseur d'énergie-impulsion**. Pour $\mu = 0$, les translations de temps, nous obtenons la conservation du courant d'énergie

$$i_0\omega + d(A_0 H) = A_0 dH + dA \wedge i_0 H - L(H)\,\eta_0\,.$$

En explicitant chacun de ces termes nous trouvons :

$$\sigma^*(A_0 dH) = A_0(x)J(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma^*(dA \wedge i_0 H) &= \tfrac{1}{2}\,B_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \tfrac{1}{2}\,H^{ij}(x)\,\epsilon_{ij0k}dx^k \\ &= \tfrac{1}{2}\,B_{ij}(x)H^{ij}(x)\eta_0 + B_{j0}(x)H^{ij}(x)\eta_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^*(L(H)\eta_0) &= \tfrac{1}{4}\,B_{\mu\nu}(x)H^{\mu\nu}(x)\eta_0 \\ &= \big(\tfrac{1}{4}\,B_{ij}(x)H^{ij}(x) + \tfrac{1}{2}\,B_{i0}(x)H^{i0}(x)\big)\eta_0\,.\end{aligned}$$

Ainsi la densité d'énergie du champ de Maxwell est

$$\tau_0{}^0(x) = \tfrac{1}{4}\,B_{ij}(x)H^{ij}(x) - \tfrac{1}{2}\,B_{0i}(x)H^{0i}(x) = \tfrac{1}{2}\Big(\vec{B}(x)\vec{H}(x) + \vec{E}(x)\vec{D}(x)\Big)$$

et le flux correspondant, le vecteur de Poynting, est

$$\tau_0{}^i(x) = B_{j0}(x)H^{ij}(x) = \big(\vec{E}(x) \wedge \vec{H}(x)\big)^i.$$

Pour retrouver le terme de transfert dû aux sources, le terme

$$-\vec{E}(x)\vec{J}(x)$$

que prédit la théorie de Maxwell. Il faut calculer

$$d({\tau_0}^{\nu}(x)\eta_\nu) = \sigma^*\Big(d\big(i_0(\omega + A\wedge J(x)\big) - A_0 dH)\Big)\,.$$

Mais ici

$$L_0(\omega + A\wedge J(x)) = 0$$

et ainsi nous trouvons :

$$\begin{aligned}
d({\tau_0}^{\nu}(x)\eta_\nu) &= \sigma^*\Big(-i_0 d\big(\omega + A\wedge J(x)\big) - dA_0\wedge dH\Big)\\
&= \sigma^*\Big(-i_0(dA\wedge J(x) - dA_0\wedge dH)\Big)\\
&= \sigma^*\big(-dA\wedge i_0 J(x)\big)\\
&= -\tfrac{1}{2}B_{\mu\nu}(x)dx^\mu\wedge dx^\nu\,\tfrac{1}{2}J^i\epsilon_{i0jk}dx^j\wedge dx^k\\
&= -B_{i0(x)}J^i(x)\eta
\end{aligned}$$

qui est le terme cherché. Ce terme décrit le tranfert d'énergie électrique en une autre, pas seulement les pertes par effet Joule mais aussi les gains dus aux génératrices.

Pour $\mu = j$, les translations d'espace, nous obtenons la définition du courant de quantité de mouvement :

$${\tau_j}^{\nu}(x)\eta_\nu = \tfrac{1}{2}\,B_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\wedge dx^\nu\wedge\tfrac{1}{2}\,H^{\rho\lambda}(x)\epsilon_{\rho\lambda j\sigma}dx^\sigma - \tfrac{1}{4}\,B_{\mu\nu}(x)H^{\mu\nu}(x)\eta_j$$

et en particulier sa densité :

$${\tau_j}^{0}(x) = B_{ij}(x)H^{0i}(x) = -\big(\vec{D}(x)\wedge\vec{B}(x)\big)_j\,.$$

Pour finir, il reste à calculer le terme de transfert correspondant. C'est un calcul analogue au précédent, il vient :

$$\begin{aligned}
d({\tau_j}^{\nu}(x)\eta_\nu) &= \sigma^*\Big(-i_j d\big(\omega + A\wedge J(x)\big) - dA_j\wedge dH\Big)\\
&= \sigma^*\Big(-i_j(dA\wedge J(x) - dA_j\wedge dH)\Big)\\
&= \sigma^*\big(-dA\wedge i_j J(x)\big)\\
&= -\tfrac{1}{2}B_{\mu\nu}(x)dx^\mu\wedge dx^\nu\,\tfrac{1}{2}J^\mu(x)\epsilon_{\mu_j\rho\lambda}dx^\rho\wedge dx^\lambda\\
&= (-B_{ij}J^i(x) - B_{0j}J^0(x))\eta\\
&= \big(\vec{J}(x)\wedge\vec{B}(x) + q(x)\vec{E}(x)\big)_j\,\eta\,.
\end{aligned}$$

Ainsi le terme de transfert de la quantité de mouvement du champ est égal à l'action des forces électriques.

4 Champ de Schrödinger-Pauli

4.1 Equations

Nous voulons construire un modèle de l'électron en tant que manifestation d'un champ dans l'espace analogue au champ de Maxwell. Il faut retrouver le modèle de la particule quantique avec les observables position, temps, quantité de mouvement et spin. Pour ce cas l'espace Σ est isomorphe à R^{12}. Il se compose de 4 variables positions x^μ et de quatre couples de nombres complexes Ψ et $\Psi^\dagger$. De plus, dans l'interaction avec le champ de Maxwell, le terme $A_\mu(x)$ est donné. Ici encore le modèle est complètement déterminé par la 4-forme de Cartan. Pour faire jouer aux variables Ψ et $\Psi^\dagger$ un rôle symétrique, nous choisirons :

$$\omega = -eA_\mu(x)\Psi^\dagger\alpha^\mu\Psi\,\eta + i\hbar\tfrac{1}{2}(d\Psi^\dagger\alpha^\mu\,\Psi - \Psi^\dagger\alpha^\mu\,d\Psi)\wedge\eta_\mu + m\,\Psi^\dagger\beta\Psi\,\eta\,.$$

Il y a donc trois constantes, la charge électrique e, la constante de Planck $2\pi\hbar$ et la masse m de l'électron et en plus, il y a cinq matrices 4×4, α^μ et β. Ces matrices jouent ici le rôle du tenseur $\mu_{\mu\nu\rho\lambda}$ dans Maxwell. Pour le cas non-relativiste ces matrices ont été écrites pour la première fois par Levy-Leblond :

$$\alpha^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha^j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{bmatrix}\,.$$

Montrons tout d'abord que nous obtenons ainsi l'équation de Schrödinger d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ avec le terme de Pauli. Il vient :

$$d\omega = -eA_\mu(x)\,d(\Psi^\dagger\alpha^\mu\Psi)\wedge\eta - i\hbar\,d\Psi^\dagger\wedge\alpha^\mu d\Psi\wedge\eta_\mu + m\,d(\Psi^\dagger\beta\Psi)\wedge\eta\,.$$

En prenant successivement pour Y les vecteurs tangents du repère naturel, correspondant aux quatre composantes de $\Psi^\dagger$ on obtient :

$$i_Y d\omega = -e\,A_\mu(x)\,\alpha^\mu\Psi\,\eta - i\hbar\,\alpha^\mu d\Psi\wedge\eta_\mu + m\,\beta\Psi\,\eta\,.$$

Le principe de Cartan impose donc quatre équations:

$$-e\,A_\mu(x)\,\alpha^\mu\Psi(x) - i\hbar\,\alpha^\mu\partial_\mu\Psi(x) + m\,\beta\Psi(x) = 0$$

équations qu'on a l'habitude d'écrire sous forme opérationelle

$$\left[\,\alpha^\mu(-i\hbar\partial_\mu - e\,A_\mu(x)) + m\beta\,\right]\Psi(x) = 0\,.$$

De la même manière on trouverait les équations imposées à $\Psi^\dagger(x)$ et on justifierait notre notation $(\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger$.

En introduisant deux objets à deux composantes

$$\Psi = \begin{bmatrix} \phi \\ \chi \end{bmatrix}$$

puis en explicitant les matrices de Levy-Leblond que nous venons de donner, on obtient deux équations couplées :

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_0\phi(x) &= \sigma^j(-i\hbar\partial_j - e\,A_j(x))\,\chi(x) - e\,A_0(x)\,\phi(x)\\
0 &= \sigma^j(-i\hbar\partial_j - e\,A_j(x))\,\phi(x) - 2m\,\chi(x)
\end{aligned}
$$

dont on tire une équation pour $\phi(x)$:

$$
i\hbar\partial_0\phi(x) = \left[\, \tfrac{1}{2m}\, g^{jk}\,(-i\hbar\partial_j - e\,A_j(x))(-i\hbar\partial_k - e\,A_k(x)) + \tfrac{\hbar e}{2m}\,\sigma_i B^i(x) - e\,A_0(x)\,\right]\phi(x)\,.
$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé l'identité :

$$
\sigma^j f_j\,\sigma^k h_k = g^{jk} f_j h_k + i\,\epsilon^{jki} f_j h_k \sigma_i\,.
$$

C'est l'**équation de Schrödinger** à deux composantes avec le **terme de Pauli** $\frac{\hbar e}{2m}\sigma_i B^i(x)$ et ici elle ne s'applique pas seulement aux vecteurs de l'espace de Hilbert, mais à toutes fonctions lisses, comme par exemples les solutions stationnnaires du type ondes planes ou encore celles qui interviennent dans les problèmes de diffusion.

4.2 Règles de la théorie quantique

Nous allons maintenant établir les règles de la théorie quantique qui jusqu'ici étaient simplement postulées. Elles découlent directement du théorème de Noether.

Ainsi la 4-forme de Cartan ω est invariante sous l'action du groupe de phase :

$$
\Psi \longmapsto \mathrm{e}^{i\hbar^{-1}\lambda}\Psi \qquad\qquad \Psi^\dagger \longmapsto \Psi^\dagger \mathrm{e}^{-i\hbar^{-1}\lambda}\,.
$$

Le champ de vecteurs tangents $\xi(P)$ correspondant s'écrit :

$$
\xi(P) = i\hbar^{-1}\Psi\,\mathrm{e}_\Psi - i\hbar^{-1}\,\mathrm{e}_{\Psi^\dagger}\Psi^\dagger
$$

où e_Ψ et $\mathrm{e}_{\Psi^\dagger}$ sont les vecteurs du repère naturel, tangent aux coordonnées Ψ et $\Psi^\dagger$. Le théorème de Noether fournit alors une 3-forme conservée :

$$
\sigma^*(i_\xi\omega) = \Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\Psi(x)\,\eta_\mu
$$

c'est-à-dire, en explicitant les matrices de Levy-Leblond,

$$
J^0(x) = \phi^\dagger(x)\phi(x) \qquad \text{et} \qquad J^i(x) = \phi^\dagger(x)\sigma^i\chi(x) + \chi^\dagger(x)\sigma^i\phi(x)\,.
$$

Nous avons donc démontré la conservation du produit défini sur les deux premières composantes

$$
(\phi\,|\,\phi) \;= \int\limits_D \phi^\dagger(x)\phi(x)\eta_0
$$

Si D est compact l'intégrale existe et si de plus les termes $J^i(x)$ s'annulent aux bords, c'est une constante dans le temps. Ce produit étendu à tout l'espace définit l'**espace de Hilbert** comme le dual de l'espace des fonctions lisses de carré sommable. Nous avons ainsi justifier le rôle de l'espace de Hilbert en théorie quantique.

Si $A_j(x)$ est nul alors ω est invariant par translation le long de la coordonnée x^j. En notant j le vecteur correspondant du repère naturel nous obtenons

$$i_j\omega = i\hbar\,\tfrac{1}{2}(d\Psi^\dagger\alpha^\mu\,\Psi - \Psi^\dagger\alpha^\mu\,d\Psi)\wedge\eta_{\mu j} + m\,\Psi^\dagger\beta\Psi\,\eta_j$$

et la 3-forme conservée correspondante s'écrit

$$\begin{aligned}\sigma^*(i_j\omega) &= i\hbar\,\tfrac{1}{2}\big(d\Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\,\Psi(x) - \Psi^\dagger(x)\alpha^\mu d\Psi(x)\big)\wedge\eta_{\mu j} + m\,\Psi^\dagger(x)\beta\Psi(x)\,\eta_j\\ &= -i\hbar\,\tfrac{1}{2}\big(\partial_j\Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\,\Psi(x) - \Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\,\partial_j\Psi(x)\big)\,\eta_\mu\\ &\qquad + \big[\,i\hbar\tfrac{1}{2}\big(\partial_\mu\Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\,\Psi(x) - \Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\,\partial_\mu\Psi(x)\big) + m\,\Psi^\dagger(x)\beta\Psi(x)\,\big]\,\eta_j\\ &= -i\hbar\,\tfrac{1}{2}(\partial_j\Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\,\Psi(x) - \Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\,\partial_j\Psi(x))\,\eta_\mu\end{aligned}$$

ce qui démontre que la **densité de quantité de mouvement** est donné par l'expression

$$\tfrac{1}{2}\big(i\hbar\partial_j\phi^\dagger(x)\phi(x) + \phi^\dagger(x)(-i\hbar\partial_j)\phi(x)\big)\eta_0$$

deux opérateurs, un à gauche et un à droite, dont la somme est toujours auto-adjointe car lors d'une intégration par parties les termes aux bords se détruisent. C'est pourquoi l'opérateur $p_j = -i\hbar\partial_j$ qui est auto-adjoint sur l'espace de Hilbert est bien l'observable quantité de mouvement de la théorie quantique, plus précisément

$$\int_D \tfrac{1}{2}\big(i\hbar\partial_j\phi^\dagger(x)\phi(x)\big) + \phi^\dagger(x)(-i\hbar\partial_j)\phi(x)\big)\eta_0$$

est la quantité de mouvement du champ contenue dans D.

Par analogie l'opérateur multiplication par x^i définit la **densité de position** et

$$\int_D \phi^\dagger(x)x^j\phi(x)\eta_0$$

est le centre de gravité du champ contenu dans D.

Toujours dans le cas où $A_\mu(x)$ est nul, la 4-forme ω est aussi invariante par les rotations d'axe e_i autour de l'origine. Le champ de vecteurs $\xi(P)$ correspondant est donné, en termes des vecteurs e_k, e_j, e_Ψ et $\mathrm{e}_{\Psi^\dagger}$ du repére naturel, par l'expression

$$\xi(P) = x_j\mathrm{e}_k - x_k\mathrm{e}_j - i\,\mathrm{e}_\Psi\,\tfrac{1}{2}\sigma^i\Psi + i\,\Psi^\dagger\,\tfrac{1}{2}\sigma^i\mathrm{e}_{\Psi^\dagger}$$

car il faut aussi faire tourner les spineurs Ψ et $\Psi^\dagger$. Le calcul se fait à partir du précédent par linéarité et démontre que la **densité de moment cinétique** se compose, de la **densité de moment orbital** qui s'écrit :

$$x_jp_k - x_kp_j$$

et de la **densité de moment cinétique interne** due au spin :

$$\hbar \tfrac{1}{2}\, \sigma^i$$

Nous avons ainsi retrouvé l'essentiel des règles de la mécanique quantique. L'interprétation de $\phi^\dagger(x)\phi(x)\eta_0$ que nous avons donnée est celle qu'avait proposée Schrödinger mais ici l'évolution de cette densité n'a rien avoir avec l'effet du déplacement des particules d'un fluide comme ce dernier l'avait imaginé à tort.

4.3 Covariance dynamique Galiléenne

Nous voulons démontrer la covariance dynamique du champ de Schrödinger-Pauli sous l'action du groupe de Galilée. Pour cela, il faut analyser la nature tensorielle de chacun des termes qui interviennent dans la 4-forme ω. Pour une rotation le problème est bien connu, Ψ et $\Psi^\dagger$ se transforment comme des doublets de spineurs et c'est ce que nous avons déja utilisé au paragraphe précédent. Pour une transformation de Galilée pure il faut en rappeler l'**action transposée** sur le quadrivecteur contravariant $x^\mu = (t, x^j)$

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x^j &= x'^{\,j} + v^j\, t' \end{aligned}$$

et sur le quadrivecteur covariant $A_\mu = (-V, A_j)$

$$\begin{aligned} -V &= -V' - v^i\, A'_i \\ A_j &= A'_j\,. \end{aligned}$$

Ensuite nous sommes conduit à poser $\Psi = S(\vec{v}\,)\Psi'$ et $\Psi^\dagger = \Psi'^\dagger S^\dagger\,(\vec{v}\,)$ où

$$S(\vec{v}\,) = e^{if_{\vec{v}}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2}\sigma_i v^i & I \end{bmatrix}$$

est à une phase près la **représentation spinorielle** proposée par Levy-Leblond.

Commençons par vérifier que les α^μ se tranforment bien de manière contravariante

$$S^\dagger(\vec{v}\,)\alpha^0 S(\vec{v}\,) = \alpha^0 \qquad S^\dagger(\vec{v}\,)\alpha^j S(\vec{v}\,) = \alpha^j + v^j\,\alpha^0\,.$$

En effet nous obtenons

$$\begin{bmatrix} I & \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i \sigma^j & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^j I & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{bmatrix}$$

En suite pour la matrice β il vient :

$$\begin{bmatrix} I & \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_i v^i \\ 0 & -2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{2}\,\sigma_i v^i & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} v_i v^i & -\sigma_i v^i \\ -\sigma_i v^i & -2I \end{bmatrix}$$

ce qui démontre que

$$S^\dagger(\vec{v}\,)\beta S(\vec{v}\,) = \beta - v_i\,\alpha^i - \tfrac{1}{2}\,v_i v^i \alpha^0$$

Or les deux derniers termes peuvent être compensés par la phase $f_{\vec{v}}$. En choisissant

$$f_{\vec{v}} = \hbar^{-1}(m\,v_i x'^i + \tfrac{1}{2}\,m\,v_i v^i t')$$

nous obtenons en particulier :

$$-i\hbar\,\Psi'^\dagger S^\dagger(\vec{v})\alpha^\mu d(S(\vec{v})\Psi') \wedge \eta'_\mu = -i\hbar\Psi'^\dagger\alpha^\mu d\Psi' \wedge \eta'_\mu + \Psi'^\dagger(mv_i\alpha^i + \tfrac{1}{2}mv_i v^i\alpha^0)\,\Psi'\,\eta'$$

Ainsi, en additionnant tous les termes, la 4-forme ω est bien invariante sous l'action transposée du groupe de Galilée.

Pour montrer la signification physique de la phase $f_{\vec{v}}$ prenons l'exemple donné par Galilée lui-même. Une particule libre, immobile sur un bateau a par rapport à la rive la quantité de mouvement mv_j et l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv_iv^i$. Par la transformation de Galilée, le quadrivecteur correspondant $(-\frac{1}{2}mv_iv^i\,, mv_j)$ devient dans le repère du bateau $(\frac{1}{2}mv_iv^i\,, mv_j)$, d'où cette phase traduisant une translation d'énergie $-\frac{1}{2}mv_iv^i$ et de quantité de mouvement mv_j.

5 Champ de Dirac

5.1 Equations

Le groupe de Galilée ne laisse pas invariant le tenseur phénoménologique $\mu_{\mu\nu\rho\lambda}(x)$ même pour l'espace vide. C'est pourquoi il faut remplacer le groupe de Galilée par celui de Lorentz. De fait pour obtenir la théorie de Dirac, covariante de Lorentz, il suffit simplement de changer les matrices α^μ et β qui interviennent dans la 4-forme de Cartan du champ de Schrödinger-Pauli. Ainsi on obtient formellement la même équation

$$\left[\alpha^\mu(-i\hbar\partial_\mu - e\,A_\mu(x)) + m\beta\right]\Psi(x) = 0$$

mais avec les **matrices de Dirac** :

$$\alpha^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad \alpha^i = c\begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \qquad \beta = c^2\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}.$$

C'est exactement l'équation proposée initialement par Dirac, mais ce n'est pas celle qui a été popularisée et qui est plus symétrique dans les indices temps et espace. Or si on multiplie l'équation précédente par une matrice 4×4 inversible on obtient une nouvelle équation équivalente. En particulier en multipliant par $c\beta^{-1}$ et en définissant

$$\gamma^0 = c\beta^{-1}\alpha^0 = c^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma^j = c\beta^{-1}\alpha^j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix},$$

on obtient l'**équation de Dirac** sous sa forme habituelle, dite covariante :

$$\left[\gamma^\mu(-i\hbar\partial_\mu - e\,A_\mu(x)) + mc\right]\Psi(x) = 0\,.$$

En effet on peut vérifier que

$$(\gamma^0)^2 = c^{-2}I \qquad (\gamma^j)^2 = -I \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \ \text{ pour } \mu \neq \nu$$

en d'autres termes que

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,g^{\mu\nu}\,I\,.$$

De plus, il est possible de montrer que ces relations de commutation caractérisent presque complètement les matrices γ^μ. Plus précisément, si γ'^μ est un autre ensemble de quatre matrices satisfaisant ces relations alors il existe une matrice inversible S telle que

$$\gamma^\mu = S\gamma'^\mu\,S^{-1}\,.$$

Ce résultat ne permet pas de construire S aussi nous ne l'utiliserons pas, nous donnerons chaque fois S explicitement.

5.2 Courant de Dirac et courants conservés

La 4-forme de Cartan du champ de Dirac ayant la même structure que celle du champ de Schrödinger-Pauli, les lois de conservation que nous avons trouvées précédemment sont encore valables, mais en tenant compte des nouvelles matrices α^μ et β. Ainsi pour le groupe de phase on obtient le courant conservé

$$J^\mu_\lambda(x) = \Psi^\dagger(x)\alpha^\mu\Psi(x)$$

mais ici $J^0_\lambda = \Psi^\dagger(x)\Psi(x)$, c'est-à-dire qu'il faut maintenant sommer sur les quatre composantes pour obtenir la densité conservée. L'espace de Hilbert correspondant a donc doublé en quelque sorte. En posant $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger c^{-1}\beta$, ce même courant s'écrit

$$J^\mu_\lambda(x) = \overline{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)\,.$$

C'est le courant de Dirac sous sa forme contravariante usuelle, il est conservé même en présence de l'interaction électromagnétique. Dans le cas libre il y a en plus l'invariance par translation et les courants correspondants s'écrivent :

$$\tfrac{1}{2}\big(i\hbar\partial_j\Psi^\dagger(x)\Psi(x)\ + \Psi^\dagger(x)(-i\hbar\partial_j)\Psi(x)\big)\eta_0\,.$$

Chacune des quatre composantes de $\Psi(x)$ donne donc une contribution à la densité de quantité de mouvement. Il en est de même pour l'énergie et le moment cinétique.

5.3 Covariance dynamique Lorentzienne

Le **groupe de Lorentz** est engendré par des rotations et des transformations de Lorentz pures. Dans le cas des rotations, le problème a déja été traité et nous avons montré que Ψ et $\Psi^\dagger$ se transforment comme des bispineurs. Ensuite, l'action transposée d'une transformation de Lorentz pure de vitesse $v = c\tanh\theta$ dans la direction e_1 s'écrit

$$\begin{aligned}
x^0 &= +\cosh\theta x'^0 - \sinh\theta x'^1 \\
x^1 &= -\sinh\theta x'^0 + \cosh\theta x'^1 \\
x^2 &= x'^2 \\
x^3 &= x'^3\,.
\end{aligned}$$

Ayant posé $\Psi(x) = S(\theta)\Psi'(x)$ comme précédemment, il est facile de vérifier que pour $S(\theta) = \cosh\frac{\theta}{2}\alpha^0 - \sinh\frac{\theta}{2}\alpha^1$ les matrices α^μ se tansforment de la bonne façon

$$\begin{aligned}
S^\dagger(\theta)\alpha^0 S(\theta) &= +\cosh\theta\,\alpha^0 - \sinh\theta\,\alpha^1 \\
S^\dagger(\theta)\alpha^1 S(\theta) &= -\sinh\theta\,\alpha^0 + \cosh\theta\,\alpha^1 \\
S^\dagger(\theta)\alpha^2 S(\theta) &= \alpha^2 \\
S^\dagger(\theta)\alpha^3 S(\theta) &= \alpha^3
\end{aligned}$$

et que la matrice β reste inchangée. Ainsi dans le cas lorentzien il n'apparaît pas de termes supplémentaires .

5.4 Approximation galiléenne

Nous voulons maintenant comparer l'équation de Dirac à l'équation de Schrödinger-Pauli et montrer que cette dernière s'obtient comme le cas limite où toutes les énergies en jeu sont voisines de mc^2. En explicitant les matrices α^μ l'équation de Dirac s'écrit

$$i\hbar\partial_0\phi(x) = c\sigma^j\big(-i\hbar\partial_j - eA_j(x)\big)\chi(x) + \big(-eA_0(x) + mc^2\big)\phi(x)$$

$$i\hbar\partial_0\chi(x) = c\sigma^j\big(-i\hbar\partial_j - eA_j(x)\big)\phi(x) + \big(-eA_0(x) - mc^2\big)\chi(x)\,.$$

Or la valeur zéro de l'énergie en Galilée correspond à la valeur mc^2 en Lorentz, il faut donc pour comparer translater les énergies en posant

$$\Psi(x) = e^{-imc^2\hbar^{-1}x^0}\Psi'(x)\,.$$

L'équation de Dirac s'écrit ainsi

$$i\hbar\partial_0\phi'(x) = c\sigma^j\big(-i\hbar\partial_j - eA_j(x)\big)\chi'(x) - eA_0(x)\phi'(x)$$

$$i\hbar\partial_0\chi'(x) = c\sigma^j\big(-i\hbar\partial_j - eA_j(x)\big)\phi'(x) - \big(eA_0(x) + 2mc^2\big)\big)\chi'(x)\,.$$

Ensuite il est utile de changer de notation en posant $\chi'(x) = c^{-1}\chi''(x)$ car il vient alors

$$i\hbar\partial_0\phi'(x) = \sigma^j\big(-i\hbar\partial_j - eA_j(x)\big)\chi''(x) - eA_0(x)\phi'(x)$$

$$i\hbar c^{-2}\partial_0\chi''(x) = \sigma^j\big(-i\hbar\partial_j - eA_j(x)\big)\phi'(x) - \big(c^{-2}eA_0(x) + 2m\big)\chi''(x)\,.$$

Ainsi, aux termes en c^{-2} près, cette équation est la même que celle obtenue avec les matrices de Levy-Leblond.

6 Electrodynamique quantique

6.1 Equations

Nous obtiendrons une théorie du champ de Maxwell-Dirac, l'électrodynamique quantique, en prenant pour forme de Cartan la somme des formes du champ de Maxwell (4.1) et du champ de Schrödinger-Pauli (5.1) mais en ne gardant qu'une seule fois l'interaction

$$\omega = dA \wedge H - L(x,H)\eta - A_\mu e \Psi^\dagger \alpha^\mu \Psi \eta + i\hbar \tfrac{1}{2}(d\Psi^\dagger \alpha^\mu \Psi - \Psi^\dagger \alpha^\mu d\Psi) \wedge \eta_\mu + m \Psi^\dagger \beta \Psi \eta \, .$$

Cette 4-forme est définie sur un espace Σ à 22 dimensions composé des 4 coordonnées x^μ, des 4 potentiels A_μ, des 6 variables antisymétriques $H^{\mu\nu}$ et des 8 composantes de Ψ et $\Psi^\dagger$. Elle décrit un spin $\frac{1}{2}$ dans le champ de Maxwell en l'absence d'autres sources. Nous pouvons obtenir un cas un peu plus général en remplaçant partout dans ω la variable A_μ par $A_\mu + A^e_\mu(x)$, où $A^e_\mu(x)$ est un champ extérieur donné, par exemple le champ coulombien d'un proton. Les équations que nous obtenons ainsi sont formellement les mêmes, mais elles sont couplée entre elles d'une manière consistante, grâce au principe de Cartan.

6.2 Lois de conservations

L'invariance globale sous l'action du groupe de phase démontre la conservation du courant de Dirac. Ainsi l'espace de Hilbert associé au champ de l'électrodynamique d'un seul électron est le même que celui du champ de Dirac seul. Dans le cas particulier où l'espace est homogène le terme $L(x,H)$ ne dépend pas explicitement de x et l'invariance sous l'action des translations démontre la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totale. Si de plus l'espace est isotrope, l'invariance sous l'action des rotations démontre alors la conservation du moment cinétique total.

6.3 Effets du champ propre

Comme nous l'avons remarqué, les équations pour $\Psi(x)$ ont la même structure que précédemment dans le cas non couplé, mais maintenant le champ $A_\mu(x)$ se compose non seulement du champ extérieur $A^e_\mu(x)$ qui est supposé donné mais aussi du champ propre $A^s_\mu(x)$ qui accompagne Ψ. Ce champ obéit aux équations de Maxwell

$$\partial_\nu H^{\nu\mu}(x) = J^\mu(x)$$

et

$$\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = B_{\mu\nu}(x,H) \, .$$

Dans le cas du vide, $B_{\mu\nu}(x,H)$ est donné par

$$B_{\mu\nu}(H) = \mu_{\mu\nu\rho\lambda} H^{\rho\lambda} = \mu_0 g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} H^{\rho\lambda}(x)$$

où $g_{\mu\nu}$ est le tenseur que nous avons déja rencontré (1.6.2). C'est là déjà une approximation car l'espace n'est pas vide, il contient le champ $\Psi(x)$ et $g_{\mu\nu}$ devrait dépendre de x et être déterminé par une autre théorie, par exemple la théorie de la gravitation. Mais il y a aussi une autre source de difficultés, l'équation d'évolution de $\Psi(x)$ dépend explicitement de $A^e_\mu(x) + A^s_\mu(x)$. Aussi pour calculer $A^s_\mu(x)$ en posant :

$$A^s_\mu(x) = -e\mu_0 \int dy\, G_{\mu\nu}(x,y) J^\mu(y)$$

où $G_{\mu\nu}(x,y)$ est le propagateur adapté au problème, il faut, dans l'équation de $\Psi(x)$, négliger le terme $A^s_\mu(x)$. Dans notre cas, dans le vide et en l'absence de cavité, les contributions à l'infini sont égales et ce **propagateur** s'écrit en jauge de Lorentz :

$$G_{\mu\nu}(x,y) = D(x-y)g_{\mu\nu} = (2\pi)^{-4} \int dk \frac{\exp(-ik(x-y))}{k^2 + i\varepsilon} g_{\mu\nu}\,.$$

Le terme de la 4-forme de Cartan qui entraîne la modification des équations de $\Psi(x)$ est exactement :

$$-\tfrac{1}{2} e A^s_\mu(x) \Psi^\dagger \alpha^\mu \Psi \eta$$

car la création de $A^s_\mu(x)$, en modifiant le champ de Maxwell compense l'autre moitié de l'interaction. En effet

$$\sigma^*\big(dA \wedge H - L(H)\eta\big)$$

s'écrit

$$\Big(\tfrac{1}{2} B_{\mu\nu}(x) H^{\mu\nu}(x) - L\big(H(x)\big)\Big)\eta = \tfrac{1}{4} B_{\mu\nu}(x) H^{\mu\nu}(x)\eta = \sigma^*(\tfrac{1}{2} dA \wedge H)$$

ou encore $\sigma^*(\frac{1}{2} A \wedge J)$ à une différentielle exacte près.

En résumé, dans l'action $\int \sigma^* \omega(x)$, la contribution due au champ propre s'écrit

$$W^s = \tfrac{1}{2}\mu_0 \int dx dy J^\mu(x) D(x-y) J^\nu g_{\mu\nu}\,.$$

A. Barut et ses collaborateurs ont montré dans toute une série de publications que W^s permet de calculer non seulement le déplacement de Lamb, l'émission spontanée et la polarisation du vide, mais aussi le moment magnétique anormal.

7 Références

Pour plus de détails on consultera :

C. Piron 2005 ; “Méthodes quantiques” PPUR, Lausanne.

Le lecteur novice lira avec profit le chapitre 7 de :

V. Arnold 1976 ; “Les méthodes mathématiques de la mécanique classique” éditions mir, Moscou.

et le début du chapitre 1 de :

S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam 2000 ; “Lectures on Differential Geometry” World Scientific, Singapore.

G. De Rham 1973 ; “Variétés différentiables” Hermann, Paris.

E. Cartan 1922 ; “Leçons sur les invariants intégraux” Hermann, Paris.

A. O. Barut, D. J. Moore and C. Piron 1993 ; “The Cartan formalism in field theory” *Helv. Phys. Acta* **66** 795-809.

J.-M. Levy-Leblond 1967 ; “Nonrelativistic Particles and Wave Equations” *Commun. Math. Phys.* **6** 286- .

C. Piron and D. J. Moore 1995 ; “New aspects of field theory” *Turk. J. Phys.* **19** 202-216.

C. Piron 1996 ; “Quantum Theory without Quantification” *Helv. Phys. Acta* **69** 694-701.

L'effet du champ propre a été traité dans :

A. O. Barut 1990 ; “New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics, partie II” Plenum Press, New York and London.

M. Babiker 1975 ; “Source-field approach to radiative corrections and semiclassical radiation theory” *Physical Rewiew A* **12** 1911-1918.